

## Семинар 23

Нужно либо доказать сформулированное утверждение, либо ответить на вопрос задачи.

1. В любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжения боковых сторон лежат на одной прямой.

2. Для того, чтобы два четырехугольника были аффинно равны необходимо и достаточно, чтобы совпадали отношения, в которых одноименные диагонали этих четырехугольников делятся точками их пересечения.

3. Перечислите все аффинно-правильные выпуклые четырехугольники.

4. Эллипс является геометрическим местом таких точек, что  $S^2(\triangle OAM) + S^2(\triangle OBM) = S^2(\triangle OAB)$ , где  $O, A, B$  – три фиксированные точки общего положения на аффинной плоскости (Внимание! Это определение эллипса не требует метрики)

5. Эллипс отсекает из пучка параллельных прямых пучок параллельных хорд. Середины этих хорд лежат на одной прямой. Факт, верный и для гиперболы с параболой.

6. Если  $O$  – это центр эллипса, вписанного в четырехугольник  $ABCD$ , то  $S(\triangle OAB) + S(\triangle OCD) = S(\triangle ODA) + S(\triangle OBC)$ .

7. В эллипс  $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1$  вписать (описать вокруг него) треугольник максимальной площади. Найти эти максимальные площади.

8. Фиксируем на евклидовой плоскости отрезок  $AB$ . Что из себя представляет геометрическое место таких точек  $M$ , что разность углов при основании  $AB$  треугольника  $ABM$  равна  $90^\circ$ ?

9. Отрезок любой касательной к гиперболе, заключенный между ее асимптотами, делится точкой касания пополам, а все треугольники, образованные касательной к гиперболе и ее асимптотами, аффинно равны.

10. Площадь треугольника, вписанного в параболу, пропорциональна произведению длин ортогональных проекций сторон на касательную в вершине параболы.