Семинар 9

Задача 1. [Любые две геометрические реализации системы Штейнера $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ проективно эквивалентны.] Ниже предлагается схема доказательства, содержащая минимум координатных вычислений, отличная от обсуждавшейся на семинаре. Решение отмеченных в ней деталей нужно получить самостоятельно.

(1) **[Проективные соответствия между параллельными прямыми в конечной аффинной геометрии $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$.]** Пусть даны две параллельные прямые l и m в $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$, и точка $a \in \mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ вне этих прямых.
Покажите, что проектирование $\pi_a : l \to m$ из точки a является биекцией между l и m.
Покажите, что если $b \in \mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ — другая точка вне этих прямых, то композиция $\pi_b^{-1} \circ \pi_a : l \to l$ является циклической перестановкой трех точек прямой l.

(2) Рассмотрим теперь геометрическую реализацию системы Штейнера $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, а в ней — конфигурацию, описанную в предыдущем пункте, использовав для обозначения соответствующих прямых и точек те же самые буквы. Обозначим через z точку пересечения прямых l и m в $\mathbb{P}^2$. Тогда композиция двух перспектив $\varphi = \pi_b^{-1} \circ \pi_a : l \to l$ является проективным автоморфизмом прямой $l \subset \mathbb{P}^2$, сохраняющим точку z и циклически переставляющая три точки системы Штейнера, лежащие на прямой l.
Покажите, что вторая неподвижная точка автоморфизма φ это точка w пересечения прямой l с прямой ab, и что если выбрать проективные координаты на прямой l так, что $z = (1 : 0)$ и $w = (0 : 1)$, то проективный автоморфизм φ будет задаваться формулой $\varphi(x : y) = (x : \varepsilon y)$, где ε — первообразный кубический корень из единицы. [Заметьте, что ab — это третья прямая на $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ в пучке параллельных прямых, содержащем l и m.]

(3) Рассмотрим на аффинной плоскости $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ тройку параллельных прямых l, m и n и какую-нибудь их секущую s. Рассмотрим какую-нибудь геометрическую реализацию этой системы Штейнера на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ и обозначим теми же буквами соответствующие прямые в $\mathbb{P}^2$. Тогда в двойственной плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$ точки $\check{l}$, $\check{m}$, $\check{n}$ и $\check{s}$ являются четверкой точек в общем положении, поэтому мы можем выбрать проективную систему координат так, чтобы эти точки в $\check{\mathbb{P}}^2$ имели координаты соответственно $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ и $(1 : 1 : 1)$.
Покажите, что при таком выборе координат девять точек системы Штейнера будут однозначно определены: координаты трех точек на секущей s будут всевозможными перестановками чисел 0, 1 и -1, а координаты остальных шести точек будут всевозможными перестановками чисел 0, 1 и $-\varepsilon$.

Задача 2. [Сколько касательных можно провести к гладкой кубике из точки на ней?] Для ответа на этот вопрос у нас имеется конструкция поляры: если $X \subset \mathbb{P}^2$ — гладкая кубика, $a \in X$, то касательными, проведенными к кубике X из точки a (за исключением касательной $\mathbb{T}_a X$) будут такие прямые ab, что $b \in X \cap P_a X$, $a \neq b$. Тем самым вопрос сводится к нахождению числа точек пересечения $X \cap P_a X$, которое, по теореме Безу в общем случае должно быть 6, но может оказаться меньше в случае нетрансверсального пересечения кривых.

(1) Докажите, что если $X \subset \mathbb{P}^2$ — произвольная плоская кривая степени $d > 1$, $b \in X \cap P_a X$, где a и b — две различные точки, и кривая X неособа в точке b, то X и $P_a X$ пересекаются в точке b трансверсально, т.е. $\mathbb{T}_b X \neq \mathbb{T}_b P_a X$.

(2) Докажите, что если $X \subset \mathbb{P}^2$ — кубика, $a \in X$ неособая точка на X, не являющаяся точкой перегиба, то X и $P_a X$ пересекаются в точке a двукратно. [Кратность пересечения кривой $X = V(F)$ степени d и коники можно вычислять с помощью результата задачи 2 семинара 8: нужно выбрать рациональную параметризацию коники и, ограничив на конику форму F, получить многочлен от параметра степени $2d$, тогда кратность пересечения в некоторой точке будет кратностью соответствующего корня этого многочлена.]

(3) Докажите, что если $X \subset \mathbb{P}^2$ — неособая кубика и $a \in X$, то количество отличных от $\mathbb{T}_a X$ касательных к кривой X, проведенных из точки a, равно 3, если точка a является точкой перегиба, и 4, если a не является точкой перегиба.

Задача 3. [Кубика и ее гессиан.] Пусть $X \subset \mathbb{P}^2$ — гладкая кубика, $\operatorname{He} X$ — ее гессиан, $a \in X \cap \operatorname{He} X$ — точка перегиба.

(1) Мы знаем, что точка перегиба характеризуется тем, что $P_a X$ является распавшейся коникой, проходящей через a и неособой в этой точке, обозначим через b особую точку коники $P_a X$. Докажите, что $b \in \operatorname{He} X$. [Особенно интересно было бы найти не вычислительное решение (я такого не знаю), хотя и вычисления для общей кубики сизигического пучка не особенно сложные.]

(2) Докажите, что в условиях предыдущего пункта касательная $\mathbb{T}_a X$ пересекает кривую $\operatorname{He} X$ в точке b не менее, чем двукратно. Другими словами, имеются три возможности: либо $\operatorname{He} X$ неособо в точке b и тогда $\mathbb{T}_a X$ является касательной к $\operatorname{He} X$ точке b (т.е. $\mathbb{T}_a X = \mathbb{T}_b \operatorname{He} X$), либо b — особая точка кубики $\operatorname{He} X$ (которая, будучи особой кубикой сизигического пучка, в этом случае должна оказаться распавшейся, а положение в этом случае точки b описывается задачей 3 прошлого задания), либо прямая $\mathbb{T}_a X$ целиком содержится в $\operatorname{He} X$.

(3) Опираясь на результат предыдущей задачи докажите, что любая неособая кубика является гессианом ровно трех неособых кубик, а любая распавшаяся кубика из сизигического пучка является гессианом ровно двух кубик из сизигического пучка: кубики Ферма и самой себя. [Отметим, что тем самым получается, что в сизигическом пучке имеются ровно 4 кубики, проективно эквивалентные кубике Ферма.]

Задача 4. [Инвариант плоской кубики.]

(1) Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — набор элементов поля $\mathbb{K}$, среди которых могут быть и равные друг другу, причем порядок этих элементов нам не важен. Такой комбинаторный объект иногда называют *мультимножеством*, обозначим его $x = [x_1, \ldots, x_n]$. Пусть $y = [y_1, \ldots, y_n]$ — другое мультимножество элементов поля $\mathbb{K}$. Докажите, что $x = y$ тогда и только тогда, когда $\sigma_i(x_1, \ldots, x_n) = \sigma_i(y_1, \ldots, y_n)\ \forall\ i,\ 1 \le i \le n$, где σ_i — основные симметрические функции.

(2) Пусть $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ — различные точки $\mathbb{P}^1$, $\lambda = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ — их двойное отношение. Положим

$$j(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2 (1 - \lambda)^2}.$$

Докажите, что для любой перестановки $\varphi \in S_4$

$$j(A_1, A_2, A_3, A_4) = j(A_{\varphi(1)}, A_{\varphi(2)}, A_{\varphi(3)}, A_{\varphi(4)}).$$

(3) Пусть $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$ — другая четверка различных точек $\mathbb{P}^1$. Докажите, что если $j(A_1, A_2, A_3, A_4) = j(B_1, B_2, B_3, B_4)$, то существет такое проективное преобразование $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, что $f(\{A_1, A_2, A_3, A_4\}) = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$. Чтобы воспользоваться первым пунктом этой задачи, можно в качестве $x_1, \ldots, x_6$ взять шесть возможных значений двойного отношения при всех возможных перестановках точек A_1, A_2, A_3, A_4, и затем убедиться в том, что значения всех симметрических функций от $x_1, \ldots, x_6$ выражаются через $j(A_1, A_2, A_3, A_4)$. Нетрудно заметить, что многочлен $P(t) = \prod_1^6 (t - x_i)$ возвратный, поэтому $\sigma_k = \sigma_{6-k}$ и $\sigma_6 = 1$, далее очевидно $\sigma_1 = \sigma_5 = 3$, и остается вычислить σ_2 и σ_3. Покажите, что $\sigma_2 = 6 - j$ и $\sigma_3 = 7 - 2j$.

(4) Пусть X — гладкая кубика, $a \in X$, $\pi_a : X \to \mathbb{P}^1$ — проектирование из точки $a \in X$. На занятии мы говорили, что это отображение является двулистным накрытием, разветвленным ровно в четырех точках (т.е. имеются ровно четыре точки $A_1, A_2, A_3, A_4,\ A_i \in \mathbb{P}^1$, такие что $\pi_a^{-1}(A_i)$ состоит из одной точки на X, а у любой другой точки из $\mathbb{P}^1$ ровно два прообраза), причем $j(A_1, A_2, A_3, A_4)$, оказывается, не зависит от выбора точки a на X, поэтому число

$$j(X) = 256 j(A_1, A_2, A_3, A_4)$$

зависит только от кривой X и называется ее *j-инвариантом.* (Сомножитель $256 = 2^8$ вводится для удобства; обратите внимание, что на занятии он был написан с ошибкой!) Докажите, что две гладкие кубики проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда их j-инварианты равны. [Для решения этой задачи кубику удобнее записать в форме Вейерштрасса $y^2 = P_3(x)$ — при проектировании из точки $(0 : 0 : 1)$ множество $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ в этом случае составляют корни многочлена $P_3(x)$ и ∞.]