

## Семинар 24

### Элементы проективной геометрии 1

1. Для двух подпространств  $V_1, V_2 \subset V$  пересечение  $P(V_1) \cap P(V_2) = P(V_1 \cap V_2)$ . Доказать.
2. Для двух подпространств  $V_1, V_2 \subset V$  проективная оболочка  $\langle P(V_1), P(V_2) \rangle$  совпадает с  $P(V_1 + V_2)$ . Доказать.
3. Для двух проективных подпространств  $P_1, P_2$  в проективном пространстве  $\dim(P_1 \cap P_2) + \dim\langle P(V_1), P(V_2) \rangle = \dim P_1 + \dim P_2$ . Доказать.
4. Доказать, что две различные прямые на проективной плоскости пересекаются ровно в одной точке.
5. Пусть  $P^1 = A^1 \cup \infty$ . Проективная система координат  $E_1, E_2, E$  на прямой  $P^1$  выбрана так, что  $E = \infty$ . Найти проективные координаты точки  $\lambda E_1 + (1 - \lambda)E_2$ .
6. Найти проективное преобразование проективной прямой, если известно, что точка  $E_1$  переходит в точку  $E_2$ , точка  $E_2$  переходит в точку  $E_1$ , а точка  $E$  остается на месте.
7. Пусть  $P^1 = A^1 \cup \infty$ . Проективная система координат  $E_1, E_2, E$  на прямой  $P^1$  выбрана так, что точки  $E_1, E_2, E$  лежат на аффинной прямой  $A^1$ , и в аффинной системе координат на этой прямой их координаты равны  $a_1, a_2, b$  соответственно. Аффинная координата точки на  $A^1$  равна  $X$ . Найти ее проективные координаты.
8. Найти неподвижные точки проективного преобразования  $\tau Y_1 = 2X_1 + X_2, \tau Y_2 = 2X_2$ .
9. Доказать, что коллинеация сохраняет размерность.
- 10\*. Доказать, что отображение, обратное коллинеации, является коллинеацией и вывести отсюда, что коллинеация уважает пересечения и проективные оболочки подпространств.