

Листок 5
АДМ-МАССА

1. Докажите, что АДМ-масса произвольного конца в асимптотически плоском многообразии существует и конечна.

2. а) Докажите, что АДМ-масса каждого из двух концов многообразия Шварцшильда массы m равна m .

б) Пусть асимптотически шварцшильдовское многообразие (M, g) имеет конец массы m , то АДМ-масса этого конца равна в точности m .

3. Пусть (M, g) – асимптотически плоское многообразие с одним концом. Пусть u – гладкая положительная функция такая, что в асимптотически плоской координатной карте она имеет вид:

$$u(x) = 1 + O_2(|x|^{-q}) \quad \text{для некоторого } q > \frac{n-2}{2} \text{ при } |x| \rightarrow +\infty.$$

Предположим, что $\Delta_g u \in L^1(M, dv_g)$. Докажите, что метрика $\tilde{g} := u^{\frac{4}{n-2}} g$ также асимптотически плоская на M и

$$m_{ADM}(\tilde{g}) = m_{ADM}(g) + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{-2}{(n-2)\omega_{n-1}} \int_{S_\rho} \frac{\partial u}{\partial r} ds_\delta$$

4. Пусть (M^n, g) – асимптотически плоское многообразие с одним концом, $n > 2$. Пусть u – гладкая положительная функция такая, что в асимптотически плоской координатной карте она имеет вид:

$$u(x) = a + b|x|^{2-n} + O_2(|x|^{2-n-\gamma})$$

для некоторого $\gamma > 0$ и некоторых констант $a > 0, b$ при $|x| \rightarrow +\infty$. Докажите, что метрика $\tilde{g} := u^{\frac{4}{n-2}} g$ также асимптотически плоская на M и

$$m_{ADM}(\tilde{g}) = a^2 m_{ADM}(g) + 2ab.$$

5. Считая известным, что если поток Риччи стартует с асимптотически плоской метрики, то все метрики вдоль него также являются асимптотически плоскими, вычислите скорость изменения АДМ-массы при потоке Риччи.

6. Докажите, что для асимптотически плоской сферически симметричной метрики $g = \frac{dr^2}{V(r)} + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ её масса равна

$$m_{ADM}(g) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} r^{n-2} (1 - V(r)).$$