

Семинар 10

Задача 1. [Любые две геометрические реализации системы Штейнера $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ проективно эквивалентны.] При обсуждении этой задачи из прошлого задания остался один неразобранный вопрос: почему при геометрической реализации системы Штейнера $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ три прямые в $\mathbb{P}^2$, отвечающие трем параллельным прямым системы Штейнера $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$, не могут пересекаться в одной точке в $\mathbb{P}^2$?

Для ответа на этот вопрос докажите, что если даны две различные прямые l и m на плоскости $\mathbb{P}^2$ и две точки a и b вне этих прямых, причем прямые l , m и ab пересекаются в одной точке, то композиция перспектив $\varphi = \pi_b^{-1} \circ \pi_a : l \rightarrow l$ имеет единственную неподвижную точку (такие элементы группы дробно-линейных преобразований иногда называют *параболическими*), и, следовательно, при подходящем выборе аффинной координаты t на прямой l задается формулой $\varphi(t) = t + c$, где $c \in \mathbb{K}$ — некоторая константа, и потому φ не может циклически переставлять точки, как это требуется согласно доказанному нами пункту 1 обсуждаемой задачи. Тем самым, прямые l , m и ab не пересекаются в одной точке на $\mathbb{P}^2$.

Задача 2. [Кратность пересечения кубики с ее полярной.] В условии пункта 1 задачи 2 прошлого задания оказались незамеченные опечатки. Мы разобрали доказательство пункта 1 в исправленной формулировке, утверждающей, что если $X \subset \mathbb{P}^2$ — произвольная плоская кривая степени $d > 1$, $b \in X \cap P_a X$, где a и b — две различные точки, и кривая X неособа в точке b , не являющейся точкой перегиба, то X и $P_a X$ пересекаются в точке b трансверсально, т.е. $\mathbb{T}_b X \neq \mathbb{T}_b P_a X$.

Осталось разобраться с пунктом 2 (он был сформулирован верно): докажите, что если $X \subset \mathbb{P}^2$ — кубика, $a \in X$ — неособая точка на X , не являющаяся точкой перегиба, то X и $P_a X$ пересекаются в точке a двукратно. [Кратность пересечения кривой $X = V(F)$ степени d и коники можно вычислять способом, указанным в задаче 2 к семинару 9: нужно выбрать рациональную параметризацию коники $P_a X$ (которая, как мы знаем, неприводима, поскольку a — неособая точка на X , не являющаяся точкой перегиба) и, ограничив на конику форму F , получите многочлен степени $2d$ от параметра, и тогда кратность пересечения в некоторой точке будет кратностью соответствующего корня этого многочлена.

Задача 3. Даны две кубические кривые X_1 и X_2 , распавшиеся на тройки различных прямых. Пусть кривые X_1 и X_2 пересекаются в 9 различных точках. Докажите, что всякая кубика X , проходящая через 8 из этих точек, проходит и через 9-ую точку.

Задача 4. Пусть X — гладкая плоская кубика над полем $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}$ характеристики 0. На последнем семинаре 7 было дано определение закона композиции на кубике X .

1) Докажите, что этот закон удовлетворяет свойствам абелевой группы. *Указание:* Ключевым свойством здесь является свойство ассоциативности закона композиции. Для его доказательства полезно воспользоваться предыдущей задачей 3 этого задания.

2) Проверьте, что групповой закон, аналогичный вышеописанному, можно построить на следующих негладких кубиках.

2.i) X — кубика с обыкновенной двойной точкой.

2.ii) X — кубика с обыкновенным острием ($y^2 = x^3$).

2.iii) X — кубика, распавшаяся на гладкую конику и прямую, пересекающуюся с коникой в двух различных точках. В этом случае групповой закон корректно определен не на всей кубике, а только на множестве ее неособых точек, не лежащих на компоненте-прямой.

2.iv) X — кубика, распавшаяся на гладкую конику и прямую, касающуюся коники. В этом случае групповой закон также корректно определен на множестве неособых точек кубики, не лежащих на компоненте-прямой.

Задача 5. [Инвариант плоской кубики.] (Эта задача из предыдущего задания к семинару 9; она осталась неразобранной на последнем семинаре, поэтому включена в настоящее задание.)

(1) Пусть $x_1, \dots, x_n$ — набор элементов поля $\mathbb{K}$, среди которых могут быть и равные друг другу, причем порядок этих элементов нам не важен. Такой комбинаторный объект иногда называют *мультимножеством*, обозначим его $x = [x_1, \dots, x_n]$. Пусть $y = [y_1, \dots, y_n]$ — другое мультимножество элементов поля $\mathbb{K}$. Докажите, что $x = y$ тогда и только тогда, когда $\sigma_i(x_1, \dots, x_n) = \sigma_i(y_1, \dots, y_n) \forall i, 1 \leq i \leq n$, где σ_i — основные симметрические функции.

- (2) Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — различные точки $\mathbb{P}^1$, $\lambda = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ — их двойное отношение. Положим

$$j(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(1 - \lambda)^2}.$$

Докажите, что для любой перестановки $\varphi \in S_4$

$$j(A_1, A_2, A_3, A_4) = j(A_{\varphi(1)}, A_{\varphi(2)}, A_{\varphi(3)}, A_{\varphi(4)}).$$

- (3) Пусть B_1, B_2, B_3, B_4 — другая четверка различных точек $\mathbb{P}^1$. Докажите, что если $j(A_1, A_2, A_3, A_4) = j(B_1, B_2, B_3, B_4)$, то существует такое проективное преобразование $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, что $f(\{A_1, A_2, A_3, A_4\}) = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$. Чтобы воспользоваться первым пунктом этой задачи, можно в качестве $x_1, \dots, x_6$ взять шесть возможных значений двойного отношения при всех возможных перестановках точек A_1, A_2, A_3, A_4 , и затем убедиться в том, что значения всех симметрических функций от $x_1, \dots, x_6$ выражаются через $j(A_1, A_2, A_3, A_4)$. Нетрудно заметить, что многочлен $P(t) = \prod_1^6 (t - x_i)$ возвратный, поэтому $\sigma_k = \sigma_{6-k}$ и $\sigma_6 = 1$, далее очевидно $\sigma_1 = \sigma_5 = 3$, и остается вычислить σ_2 и σ_3 . Покажите, что $\sigma_2 = 6 - j$ и $\sigma_3 = 7 - 2j$.
- (4) Пусть X — гладкая кубика, $a \in X$, $\pi_a : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ — проектирование из точки $a \in X$. На занятии мы говорили, что это отображение является двулистным накрытием, разветвленным ровно в четырех точках (т.е. имеются ровно четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 , $A_i \in \mathbb{P}^1$, такие что $\pi_a^{-1}(A_i)$ состоит из одной точки на X , а у любой другой точки из $\mathbb{P}^1$ ровно два прообраза), причем $j(A_1, A_2, A_3, A_4)$, оказывается, не зависит от выбора точки a на X , поэтому число

$$j(X) = 256j(A_1, A_2, A_3, A_4)$$

зависит только от кривой X и называется ее *j-инвариантом*. (Сомножитель $256 = 2^8$ вводится для удобства; обратите внимание, что на занятии он был написан с ошибкой!) Докажите, что две гладкие кубики проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда их *j-инварианты* равны. [Для решения этой задачи кубику удобнее записать в форме Вейерштрасса $y^2 = P_3(x)$ — при проектировании из точки $(0 : 0 : 1)$ множество $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ в этом случае составляют корни многочлена $P_3(x)$ и ∞ .]