

Семинар 25

Элементы проективной геометрии 2

1. Доказать, что в проективном пространстве (размерности > 1) гиперплоскость и прямая пересекаются в единственной точке.

Аффинная карта

2. Рассмотрим линейный функционал $l \in V^*$, и пусть $U_l = \{[v] \in P(V) \mid l(v) \neq 0\}$. Доказать, что U_l можно отождествить с аффинным пространством $\text{Aff}(Z)$, $Z = \{v \in V \mid l(v) = 0\}$, и $P(V) = \text{Aff}(Z) \cup P(Z)$.

3. Если поле K бесконечно, то любое конечное множество точек проективного пространства всегда лежит в некоторой аффинной карте. Доказать или опровергнуть.

Проективные преобразования

4. Два изоморфизма $F, G: V \rightarrow W$ тогда и только тогда индуцируют одинаковые проективные преобразования $[F], [G]: P(V) \rightarrow P(W)$, когда $F = \lambda G$, $\lambda \in K^*$. Доказать.

5. Пусть U, W – два равноразмерных подпространства векторного пространства V . Доказать, что любое проективное преобразование $P(U) \rightarrow P(W)$ можно продолжить (вообще говоря, многими способами) до проективного преобразования $P(V)$.

6. Доказать, что проективное преобразование, которое сохраняет аффинную карту, индуцирует на этой карте аффинное преобразование.

7. Найти какое-нибудь проективное преобразование плоскости, которое прямые $X = 0, Y = 0$ переводит в прямые $X = 0, X - 1 = 0$ соответственно.

8. Найти проективное преобразование прямой, если оно задано тремя парами соответственных точек: $(0, 1) \rightarrow (1, 2), (2, 1) \rightarrow (1, 0), (1, -2) \rightarrow (0, 1)$.

9. Найти какое-нибудь проективное преобразование плоскости, которое окружность $X^2 + Y^2 = 1$ переводит в себя, а прямую $X = 2$ делает невидимой.

10. На проективной плоскости заданы две тройки коллинеарных точек (то есть, каждая тройка лежит на своей прямой). Всегда ли существует проективное преобразование плоскости, которое переводит одну тройку в другую?