

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО - 2025
ЛИСТОК 7

1. С помощью интегральной формулы Коши вычислите интегралы
(а) $\int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2 - 1}$, (б) $\int_{|z-a|=a} \frac{z dz}{z^4 - 1}$, $a > 1$, (в) $\int_{|z-1|=1} \frac{ze^z dz}{(z-1)^3}$.

2. Пусть $f(z)$ – голоморфная функция в верхней полуплоскости, непрерывно продолжаемая на вещественную ось, причем $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$.
Докажите интегральную формулу Шварца

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x - z} dx.$$

3. Пусть $f(z)$ – голоморфная функция в единичном круге, непрерывно продолжаемая на его границу. Докажите интегральную формулу Пуанкаре

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta + i \operatorname{Im} f(0).$$

4. Найдите вычеты дифференциальных форм в их особых точках:

а) $\frac{z dz}{z^2 + 1}$, б) $\frac{e^z dz}{(z-1)^2}$, в) $\frac{z dz}{\sin^2 z}$, г) $\frac{z^{2n} dz}{(z-1)^n}$, д) $\frac{e^{1/z} dz}{1-z}$, е) $\sin z \sin(1/z) dz$,
ж) $\frac{\sin 3z - 3 \sin z}{\sin z (\sin z - z)} dz$ в точке $z = 0$, з) $z^2 \sin \frac{1}{z+1} dz$, и) $\frac{dz}{z(e^{2z} - 1)}$ в точке $z = 0$, к) $e^{z/(1-z)} dz$.

5. Докажите, что для четной функции $f(z)$ имеет место равенство

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) dz = -\operatorname{res}_{z=-a} f(z) dz$$

а для нечетной

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) dz = \operatorname{res}_{z=-a} f(z) dz$$

6. Вычислите интегралы: а) $\oint_{|z|=4} \frac{z^4 dz}{e^z + 1}$, б) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z dz}{(2z+1)^2(z+2)}$,
в) $\oint_{|z|=1} (z+1)e^{1/z} dz$, г) $\oint_{|z|=1} \frac{z^3 dz}{2z^4 + 1}$, д) $\oint_{|z|=3} \frac{z^3 - 1}{z - 1} \left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}} \right) dz$,
е) $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{e^{2/z} - e^{1/z}}$, ж) $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^2(1 - \cos z)}$, з) $\oint_{|z|=1} \frac{z - (\log 2)^{-1}}{e^{1/z} - 2} dz$.

7. Пусть функция $f(z)$ регулярна в замыкании конечной области D , а точки $a_1, \dots, a_n$ лежат в D и попарно различны. Обозначим $P(z) = (z - a_1) \dots (z - a_n)$ и

$$\Phi(z) = -\frac{P(z)}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\xi)}{P(\xi)} \frac{d\xi}{\xi - z}, \quad z \notin D.$$

Докажите, что функция $\Phi(z)$ аналитически продолжается на всю плоскость и представляет собой многочлен степени $n - 1$, причем $\Phi(a_k) = f(a_k)$, $k = 1, \dots, n$. (Многочлен $\Phi(z)$ называется интерполяционным многочленом Лагранжа.)