

## Группа кос, квантовые группы и приложения

### Листок 4. Скобки Пуассона на коммутативной алгебре

Рекомендуемый срок сдачи: 23 апреля 2025

1. Пусть  $M$  — гладкое  $n$ -мерное многообразие,  $\{z^i\}_{1 \leq i \leq n}$  — локальные координаты в некоторой области  $U \subset M$ . Скобка Пуассона любых двух функций  $f$  и  $g$  из алгебры гладких функций  $\mathcal{F}(M)$  в локальных координатах имеет вид:

$$\{f, g\} = \sum_{i,k=1}^n \partial_i f(z) \omega^{ik}(z) \partial_k g(z), \quad \partial_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial z^i},$$

где  $\omega^{ik}(z) = \{z^i, z^k\}$  — пуассонов тензор.

- а) Пользуясь определением пуассоновой структуры, выведите условия на пуассонов тензор, которые налагаются на него этим определением.
- б) Пусть матрица пуассонова тензора не вырождена в области  $U \subset M$ :  $\det \|\omega^{ik}(z)\| \neq 0$ . Обозначим символами  $\omega_{ik}(z)$  матричные элементы обратной матрицы:

$$\sum_{k=1}^n \omega_{ik}(z) \omega^{kj}(z) = \delta_i^j.$$

Докажите, что дифференциальная 2-форма  $\Omega = \sum_{i,k} \omega_{ik} dz^i \wedge dz^k$  является замкнутой и невырожденной в области  $U$  (то есть, задает симплектическую структуру в области  $U$ ).

2. Пусть алгебра гладких функций  $\mathcal{F}(M)$  на многообразии  $M$  снабжена пуассоновой структурой (см. задачу 1.). По любой заданной функции  $f \in \mathcal{F}(M)$  определим гамильтоново векторное поле  $X_f$  из касательного расслоения  $TM$  следующим действием на функции:

$$X_f \triangleright g = \{f, g\}, \quad \forall g \in \mathcal{F}(M).$$

- а) Докажите, что множество гамильтоновых векторных полей образует алгебру Ли относительно операции коммутирования и стандартных операций сложения и умножения на элементы числового поля.
- б) Для невырожденной пуассоновой структуры найдите значение 2-формы  $\Omega(X_f, X_g)$  (см. пункт б) задачи 1) на паре произвольных гамильтоновых векторных полей  $X_f$  и  $X_g$ .

3. Рассмотрим линейное пространство  $gl(N)^*$  двойственное к алгебре Ли  $gl(N)$ . Обозначим символами  $t_i^j$ ,  $1 \leq i, j \leq N$ , координаты в  $gl(N)^*$  относительно базиса, двойственного к базису матричных единиц  $E_i^j$  в алгебре  $gl(N)$ . В алгебре  $\mathcal{F}(gl(N)^*)$  полиномиальных функций на  $gl(N)^*$  скобка Пуассона-Ли вводится с помощью структурных констант алгебры Ли  $gl(N)$ :

$$\{t_{i_1}^{j_1}, t_{i_2}^{j_2}\}_{PL} = t_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_1} - t_{i_2}^{j_1} \delta_{i_1}^{j_2},$$

или, в матричных обозначениях:

$$\{T_1, T_2\}_{PL} = P_{12} T_2 - T_2 P_{12},$$

где  $P_{12}$  — матрица транспозиции, а  $T = \|t_i^j\|$  —  $N \times N$  матрица, составленная из координат. Докажите, что однородные полиномы  $p_k(t) = \text{Tr}(T^k)$  принадлежат пуассоновому центру скобки Пуассона-Ли.

4. Введем в алгебре  $\mathcal{F}(gl(N)^*)$  билинейную операцию  $\{, \}_k$  по формуле (обозначения из задачи 3):

$$\{T_1, T_2\}_k = T_1 T_2 r_{12} - r_{12} T_1 T_2,$$

и распространим ее на любые функции по правилу Лейбница  $\{f, gh\}_k = \{f, g\}_k h + g\{f, h\}_k$ . Здесь  $r_{12} = \|r_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}\|$  —  $N^2 \times N^2$  числовая матрица. При каких условиях на  $r_{12}$  введенная операция будет скобкой Пуассона?

5. Пуассонова структура  $\{, \}_k$  называется скобкой Складина. Докажите, что

а) Линейный полином  $p_1(t) = \text{Tr}(T)$  не лежит в пуассоновом центре скобки Складина, заданной классической  $r$ -матрицей Дринфельда-Джимбо.

б)\* Детерминант матрицы координат  $\det(T)$  является элементом пуассонового центра скобки Складина.

**Указание.** Для решения задачи из пункта б) полезны следующие формулы, выражающие детерминант матрицы в терминах полностью антисимметрического тензора ранга  $N$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, \dots, i_N} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} t_{j_1}^{i_1} t_{j_2}^{i_2} \dots t_{j_N}^{i_N} &= \det(T) \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_N}, \\ \sum_{\{i\}, \{j\}} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} t_{j_1}^{i_1} t_{j_2}^{i_2} \dots t_{j_N}^{i_N} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} &= N! \det(T), \\ \sum_{i_2, \dots, i_N} \varepsilon_{a i_2 i_3 \dots i_N} \varepsilon^{b i_2 i_3 \dots i_N} &= (N-1)! \delta_a^b. \end{aligned}$$

6. На алгебре полиномиальных функций можно ввести другую квадратичную пуассонову структуру, связанную с классической  $r$ -матрицей (скобка Семенова Тянь-Шанского):

$$\{T_1, T_2\}_{STS} = r_{21} T_1 T_2 - T_1 T_2 r_{12} + T_2 r_{12} T_1 - T_1 r_{21} T_2,$$

где  $r_{21} = P_{12} r_{12} P_{12}$ . Докажите, что полиномы  $p_k(T) = \text{Tr}(T^k)$  принадлежат пуассоновому центру скобки Семенова-Тянь-Шанского.

**Указание.** Получите по индукции выражение для скобки  $\{T_1^k, T_2\}$ , а затем возьмите след по первому пространству.

7. Пусть  $\mathcal{A}_h$  — квантование коммутативной алгебры  $\mathcal{A}$ ,  $a \star b$  — новое умножение в векторном пространстве  $\mathcal{A}[[h]]$ , порожденное изоморфизмом квантования  $\alpha_h$ :

$$a \star b = \alpha_h^{-1}(\alpha_h(a) * \alpha_h(b)) = a \cdot b + h c_1(a, b) + h^2 c_2(a, b) + \dots, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Рассмотрим автоморфизм некоммутативной ассоциативной алгебры  $\omega_h : \mathcal{A}[[h]] \rightarrow \mathcal{A}[[h]]$ , тождественный на компоненте пространства  $\mathcal{A}[[h]]$  нулевой степени по  $h$ :  $\mathcal{A} = \mathcal{A}[[h]]/(h\mathcal{A}[[h]])$ , то есть, как  $\mathbb{C}[[h]]$ -линейное отображение изоморфизм  $\omega_h$  имеет следующую структуру:

$$\omega_h = \text{id} + h\omega_1 + h^2\omega_2 + \dots$$

а) Докажите, что линейное отображение  $\omega_1$  является дифференцированием коммутативной алгебры  $\mathcal{A}$ , то есть,

$$\omega_1(a \cdot b) = \omega_1(a) \cdot b + a \cdot \omega_1(b), \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

- б) Докажите, что антисимметрическая часть  $c_1(a, b) - c_1(b, a)$  линейного по  $\hbar$  слагаемого в произведении  $a \star b$  не изменяется при действии автоморфизма  $\omega_\hbar$ . Таким образом, алгебра  $\omega_\hbar(\mathcal{A}[[\hbar]])$  также является квантованием коммутативной алгебры  $\mathcal{A}$  с той же пуассоновой структурой.