

Семинар 11

Задача 1. [Групповые структуры на распавшихся кубиках.]

- (1) Пусть E , P и Q — три различные точки на проективной прямой $\mathbb{P}^1$, A и B — две другие (не обязательно различные) точки, отличные от P и Q . Покажите, что на $\mathbb{P}^1$ существует единственная инволюция $\sigma_{AB} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, такая что $\sigma_{AB}(P) = Q$, $\sigma_{AB}(Q) = P$, $\sigma_{AB}(A) = B$, $\sigma_{AB}(B) = A$. Покажите, что бинарная операция на множестве $\mathbb{P}^1 \setminus \{P, Q\}$, заданная правилом $A * B = \sigma_{AB}(E)$ превращает $\mathbb{P}^1 \setminus \{P, Q\}$ в абелеву группу, изоморфную мультипликативной группе поля $\mathbb{K}^*$. [Эта конструкция была рассказана на семинаре Станиславом Кузнецовым; мы только не проверили, что если выбрать аффинную координату t на $\mathbb{P}^1$ так, что $P = 0$, $Q = \infty$, $E = 1$, $A = a$, $B = b$, то $\sigma_{AB}(t) = \frac{ab}{t}$.]
- (2) Пусть $\mathcal{C}$ — неособая плоская коника, E , P и Q — три различные точки на $\mathcal{C}$, A и B — две другие (не обязательно различные) точки на $\mathcal{C}$, отличные от P и Q . Обозначим прямую PQ через l . На прошлом семинаре мы определили групповую структуру на $\mathcal{C} \setminus \{P, Q\}$ следующим образом: обозначим через D точку пересечения прямых AB и l , и назовем $A * B$ точку пересечения прямой ED с коникой $\mathcal{C}$, отличную¹ от E . Докажите, что проектирование $\pi_E : \mathcal{C} \setminus \{P, Q\} \rightarrow l \setminus \{P, Q\}$ из точки E является изоморфизмом группы $\mathcal{C} \setminus \{P, Q\}$ и описанной в предыдущем пункте группы $l \setminus \{P, Q\}$, где в качестве единичного элемента на $l \setminus \{P, Q\}$ выбрана точка $E' = \pi_E(E)$ (это, конечно, точка пересечения прямых $TE\mathcal{C}$ и l). [Аналогом инволюции σ_{AB} из предыдущего пункта здесь является гармоническая инволюция коники, определяемая точкой D и ее полярной $P_D\mathcal{C}$.]
- (3) Пусть G и H — две изоморфных абелевых группы с групповыми операциями $\cdot_G$ и $\cdot_H$, $\varphi : G \rightarrow H$ — изоморфизм, и пусть $G \cap H = \emptyset$. Определим бинарную операцию $*$ на $G \cup H$ следующим образом: $g * g' = g \cdot_G g'$, $h * h' = \varphi^{-1}(h \cdot_H h')$, $g * h = \varphi(g) \cdot_H h$ (здесь $g, g' \in G$, $h, h' \in H$). Покажите, что $G \cup H$ с операцией $*$ является абелевой группой, изоморфной прямому произведению $G \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, так что G является ее подгруппой, а H — единственным неединичным смежным классом в фактор-группе $(G \cup H)/G$.
- (4) (Общеизвестный сюжет про сдвиг нейтрального элемента в абелевой группе.) Пусть M — абелева группа с операцией $\cdot$, $a \in M$. Рассмотрим новую бинарную операцию $\cdot_a$ на M , определенную так: $x \cdot_a y = x \cdot y \cdot a^{-1}$. Покажите, что относительно операции $\cdot_a$ M также является абелевой группой, нейтральным элементом в которой будет a , причем отображение сдвига $L_a : M \rightarrow M$, $L_a : x \mapsto a \cdot x$, является изоморфизмом между этими двумя групповыми структурами на M . Покажите, что если в условиях предыдущего пункта поменять местами G и H и взять φ^{-1} вместо φ , то новая групповая структура на $G \cup H$ (в которой теперь уже H является подгруппой, а G — смежным классом) получается из описанной в предыдущем пункте сдвигом нейтрального элемента.
- (5) Рассмотрим распавшуюся кубик $\mathcal{C} \cup l$, где $\mathcal{C}$ — неособая плоская коника, а l — прямая, пересекающая конику $\mathcal{C}$ в двух точках P и Q . Выберем точки $E \in \mathcal{C}$ и $E' \in l$ в соответствии с пунктом 2 этой задачи и рассмотрим группы $\mathcal{C} \setminus \{P, Q\}$ и $l \setminus \{P, Q\}$ в качестве групп G и H пункта 3. Покажите, что выбирая в качестве изоморфизма φ из пункта 3 отображение π_E (или π_E^{-1} — в зависимости от того, где мы хотим выбрать нейтральный элемент: на прямой или на конике) мы получим групповую структуру на $\mathcal{C} \cup l \setminus \{P, Q\}$, совпадающую с групповой структурой, описанной на семинаре Станиславом Кузнецовым.
- (6) Опишите аналогичную конструкцию для случая, когда прямая l касается неособой плоской коники $\mathcal{C}$.

Задача 2. [Точки 2-го и 3-го порядка на кубике.] Пусть X — гладкая кубическая кривая в абелевой группе X в качестве точки ноль 0 может быть выбрана любая наперед заданная точка. Обозначим через X_n подгруппу n -кручения в X (или группу точек n -го порядка в X), то есть подгруппу $X_n := \{a \in X \mid na = 0\}$.

¹Если ED касается $\mathcal{C}$ в точке E , то, конечно, $A * B = E$.

- (1) Докажите изоморфизм абелевых групп $X_2 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\times 2}$.
- (2) Докажите изоморфизм абелевых групп $X_3 \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\times 2}$.
- (3) Пусть в качестве точки 0 выбрана точка перегиба на X . Найдите геометрическую реализацию точек группы X_2 и группы X_3 .

Задача 3. [Отображение Веронезе.] Пусть $(x_0 : x_1)$, $(y_0 : y_1 : y_2)$ и $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$ - проективные координаты в $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^2$ и $\mathbb{P}^3$, соответственно.

- (1) Рассмотрим отображение Веронезе $v : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$, задаваемое формулами $(y_0 : y_1 : y_2) = (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2)$. Опишите его образ.
- (2) Рассмотрим отображение Веронезе $v : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$, задаваемое формулами $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) = (x_0^3 : x_0^2x_1 : x_0x_1^2 : x_1^3)$. Опишите все квадратики, проходящие через образ этого отображения.

Задача 4*. [Гессиан кубики как штейнериан.] Мы доказали (даже двумя способами), что если X — плоская кубика, $Y = \text{He } X$ и $b \in \text{He } X$ (что равносильно тому, что коника P_bX является особой), и если $c \in \text{Sing } P_bX$, то $c \in \text{He } X$. (Для общей плоской кривой степени d множество особенностей коник $P_{b^{d-2}}X$ при всех $b \in \text{He } X$ называется *кривой Штейнера* кривой X , так что мы доказали, что гессиан плоской кубики совпадает с ее штейнерианом.) В общем случае, когда коника P_bX имеет единственную особую точку c , мы получаем отображение $\varphi : Y \rightarrow Y$, $\varphi : b \mapsto c$.

- (1) Как устроено отображение φ в случае, когда X и Y — неособые кубики? [Гипотетический ответ — сдвиг на точку второго порядка на Y , которая указывает, гессианом какой кубики является Y .]
- (2) Как устроено отображение φ в случае, когда X — кубика Ферма? [В этом случае гессиан есть объединение трех прямых и отображение φ не определено в точках их пересечения, а остальные точки каждой из прямых φ отправляет в точку пересечения двух других прямых.]