

Избранные главы дискретной математики. Весна 2025г

Задача с 9 занятия.

Пусть n натуральное число, большее 1. Обозначим через D_n множество всех натуральных делителей числа n . Введем на множестве D_n операции $\vee$, $\wedge$ и $\neg$ следующим образом: $a \vee b = \text{НОК}(a, b)$, $a \wedge b = \text{НОД}(a, b)$, $\neg a = n/a$. При каких условиях на число n множество D_n с этими операциями $\vee$, $\wedge$ и $\neg$ является булевой алгеброй? Какая из аксиом булевой алгебры нарушается в случае, когда D_n не является булевой алгеброй относительно этих операций?

Для удобства повторяем здесь приведенный на занятии (сильно избыточный) список тождеств булевой алгебры.

Коммутативность	$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$
Ассоциативность	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
Нейтральные элементы	$a \vee 0 = a$	$a \wedge 1 = a$
	$a \vee 1 = 1$	$a \wedge 0 = 0$
Дистрибутивность	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
Идемпотентность	$a \vee a = a$	$a \wedge a = a$
Инволютивность		$\neg(\neg a) = a$
Дополнительность	$a \vee (\neg a) = 1$	$a \wedge (\neg a) = 0$
	$\neg 0 = 1$	$\neg 1 = 0$
Законы де Моргана	$\neg(a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$	$\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$
Поглощение	$a \vee (a \wedge b) = a$	$a \wedge (a \vee b) = a$