

Двойное отношение

1. Пусть A, B, C, D – четыре точки общего положения на проективной плоскости. Рассмотрим точки $P = AC \cap CD$, $Q = AD \cap BC$, $R = AC \cap PQ$, $S = BD \cap PQ$. Доказать, что двойное отношение $[P, Q, R, S] = -1$.

2. На проективной прямой $X_1 + X_2 + X_3 = 0$ лежат 4 точки $A(1, 1, -2), B(1, -1, 0), C(-1, 0, 1), D(0, 1, -1)$. Вычислить двойное отношение $[B, C, D, A]$.

3. Пусть L – некоторая прямая на проективной плоскости над полем из трех элементов. Доказать, что на L лежат ровно 4 точки, двойное отношение которых, рассматриваемое в любом их порядке, равно -1 .

Немного синтетики

4. Доказать, что проективное преобразование φ проективной плоскости однозначно определяется образами двух различных точек и образом любой прямой, не проходящей через эти точки.

5. Предположим, что все 4 точки и две прямые, о которых идет речь в задаче 4, нарисованы на плоскости. С помощью линейки постройте образ $\varphi(X)$ произвольной точки X .

6. Доказать теорему Дезарга.

7*. На проективной плоскости нарисованы 4 точки общего положения и их образы при проективном преобразовании. С помощью линейки построить образ произвольной точки плоскости.

Проективные преобразования

8. Найти порядки групп $\text{PGL}(2, F)$ и $\text{PSL}(2, F)$ над полем F из q элементов.

9. Проективное преобразование плоскости называется гомологией, если множество его неподвижных точек состоит из двух связных компонент: прямой L и точки O . Доказать, что на аффинной карте $A^2 = \mathbb{P}^2/L$ гомология представлена гомотетией с центром O и коэффициентом растяжения, отличным от 1.

10. Доказать, что проективные преобразования плоскости, поточечно оставляющие на месте некоторую прямую, образуют подгруппу проективной группы. Найти порядок этой подгруппы в случае проективной плоскости над полем из 17 элементов.

11*. Найти группу автоморфизмов конфигурации Дезарга.