Семинар 12

Задача 1. [Отображение Веронезе.] Это задача 3 прошлого задания к семинару 11.

Задача 2. [Отображение неполным линейным рядом.] Напомним сначала общую конструкцию. Пусть $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$, где V — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$ размерности $n+1$, S^dV^* — линейное пространство однородных форм степени d, $W \subset S^dV^*$ — некоторое его линейное подпространство. Тогда каждый вектор $v \in V$ можно рассматривать, как линейную форму на W, значение которой на форме $F \in W$ есть просто $F(v) \in \mathbb{K}$. Тем самым получается отображение $\varphi : V \to W^*$, причем $\varphi(\lambda v) = \lambda^d \varphi(v)$, поэтому φ переводит одномерное подпространство $\langle v \rangle \subset V$ в подпространство $\langle \varphi(v) \rangle \subset W^*$, которое также одномерно в случае, когда хотя бы одна форма $F \in W$ не обращается в ноль на векторе v. Тем самым определено отображение $\Phi = \mathbb{P}(\varphi) : \mathbb{P}(V) \setminus Z \to \mathbb{P}(W^*)$, где Z это множество совместных нулей всех форм из W. Отображение Φ называется *отображением линейным рядом* W; в случае, когда $W \neq S^dV^*$, отображение Φ называется *отображением неполным линейным рядом.* В случае $W = S^dV^*$ отображение Φ называется *отображением полным линейным рядом*, чаще такое отображение называют *отображением Веронезе*, пример которого для $n = 2$, $d = 3$ обсуждается в предыдущей задаче.

Опишите образ отображения $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(V)$ $(\dim V = 2)$ в $\mathbb{P}^2$ неполным линейным рядом кубик в следующих трех случаях:

(1) W — пространство кубических форм F, таких что $F(a) = 0$, где a — некоторый фиксированный ненулевой вектор из V.

(2) W — пространство кубических форм F, таких что $F(a) = F(b)$, где a и b — некоторые фиксированные ненулевые непропорциональные векторы из V.

(3) W — пространство кубических форм F, таких что уравнение $F(a) = F(a+tb)$ имеет двукратный корень $t = 0$ (a и b — те же, что и в предыдущем пункте).

Задача 3. [По мотивам обсуждения задачи 1 из задания к прошлому семинару 11.] Пусть X — плоская кубика, мы видели, что во многих случаях[1] на множестве неособых точек $X \setminus \operatorname{Sing} X$ вводится структура группы, для этого только надо зафиксировать нейтральный элемент группы — точку $O \in X \setminus \operatorname{Sing} X$. В случае, когда точка O не является точкой перегиба и не лежит на прямолинейной компоненте кривой X, назовем O' третью точку пересечения кривой X с касательной к ней в точке O; в остальных случаях положим $O' = O$.

(1) Покажите, что если прямая пересекает $X \setminus \operatorname{Sing} X$ в трех точках A_1, A_2, A_3 (совпадающие точки учитываются с нужной кратностью) то $A_1 + A_2 + A_3 = O'$ (сложение в смысле группового закона с нейтральным элементом O).

(2) * Покажите, что если кривая степени d пересекает $X \setminus \operatorname{Sing} X$ в $3d$ точках $A_1, \dots A_{3d}$ (совпадающие точки учитываются с нужной кратностью), то $A_1 + \dots + A_{3d} = dO'$ (сложение в смысле группового закона с нейтральным элементом O). [В случае гладкой кубики используйте следующую лемму: не существует непостоянного регулярного отображения проективной прямой в гладкую кубику.]

(3) * Попробуйте доказать лемму из предыдущего пункта.
(*Замечание.* Руководителям семинара не известны решения задач пунктов (2) и (3) средствами, которые имеются в распоряжении участников семинара, поэтому данные задачи помечены звездочкой.)

Задача 4. [По мотивам обсуждения задачи 4 к прошлому семинару 11.] В условиях пункта 1 задачи 4 прошлоео семинара докажите, что отображение φ является инволюцией без неподвижных точек кривой Y.

---

[1] Кроме неособой кривой, мы обсуждали три случая: кубика, распавшаяся на прямую и конику (два случая взаимного расположения) и кубика, распавшаяся на на тройку прямых, не проходящих через одну точку.