

Геометрия и группы.

Листок 2

(Содержит задачи для подготовки к контрольной 13 мая)

1. Пусть $A \in O(n)$, $\text{rot} A < \epsilon$. Верно ли, что $|\lambda - 1| < \epsilon$ для любого корня λ характеристического многочлена оператора A ?
2. Пусть L – решетка полного ранга на евклидовой плоскости и $\text{vol} L$ – это площадь ее фундаментальной области. Если l – это минимальная длина векторов решетки, то $\text{vol} L \geq \frac{\sqrt{3}}{2} l^2$. Доказать. Для каких решеток наступает равенство?
3. Любая подгруппа конечного индекса в кристаллографической группе является кристаллографической группой. Доказать.
4. Доказать, что теорема Бибербаха эквивалентна следующему утверждению: для любой кристаллографической группы движений евклидова пространства группа ее линейных частей конечна.
5. Перечислить все конечные группы, которые могут служить группами линейных частей у кристаллографических групп на плоскости.
6. Если кристаллографическая группа содержит параллельный перенос, то она содержит полную решетку параллельных переносов. Доказать.
7. Рассмотрим два элемента из конечной подгруппы ортогональной группы. Если ротор каждого из них меньше одной сотой, то они коммутируют. Доказать.
8. Доказать теорему Мини-Бибербах.
- 9*. Не используя теорему Бибербаха, доказать, что любая кристаллографическая группа содержит подгруппу конечного индекса, которая действует в евклидовом пространстве без неподвижных точек.