

Листок 7

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОТОКИ

1. Пусть задан поток $\Phi_t : M^n \rightarrow (\bar{M}^{n+1}, \bar{g})$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(x) = f(x, t) \nu_t(x), \quad x \in M,$$

где ν_t – внешняя единичная нормаль к $M_t = \Phi_t(M)$. Пусть g_t и B_t – индуцированная метрика и вторая квадратичная форма Σ_t . Докажите, что

$$\text{а) } \frac{\partial}{\partial t} g_t = 2fB_t, \quad \text{б) } \frac{\partial}{\partial t} ds_{g_t} = fH_t ds_{g_t}.$$

2. Пусть поток Φ есть диффеоморфизм между $[0, +\infty) \times M$ и $\bar{M}$ (здесь мы рассматриваем Φ_t как $\Phi(\cdot, t)$). Докажите, что

$$\Phi^* g = f^2 dt^2 + g_t.$$

КИЛЛИНГОВЫ ГОРИЗОНТЫ

3. а) Рассмотрим лоренцевские бусты: $x\partial_t + t\partial_x$ относительно псевдодекартовой системы координат на пространстве Минковского. Убедитесь, что эти поля киллинговы и найдите их киллинговы горизонты.

б) Пространство-время Керра представляет собой топологически $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ с координатами $(t, r, \vartheta, \varphi)$, где $t \in \mathbb{R}$, радиус $r > 0$ достаточно большой, широта $0 \leq \vartheta \leq \pi$ и долгота $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (сферические координаты на $\mathbb{R}^3$). Введём обозначения

$$\begin{aligned} S &:= \sin \vartheta \\ C &:= \cos \vartheta \\ \rho^2 &:= r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta \\ \Delta &:= r^2 - 2Mr + a^2 \\ \mathcal{A} &:= (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \vartheta. \end{aligned}$$

Тогда метрика Керра на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ записывается так

$$-\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\vartheta^2 - \frac{4Mr a S^2}{\rho^2} dt d\varphi + \frac{\mathcal{A}}{\rho^2} S^2 d\varphi^2,$$

где $M^2 \geq a^2$. Пространство-время Керра не является статическим. Это более общий случай *стационарного пространства-времени*. Докажите, что поле ∂_t является киллинговым и найдите его киллингов горизонт. Он называется *эргосферой*.

4. Обязательно ли множество точек $\{x \in M \times \mathbb{R} \mid V(x) = 0, t = 0\}$ на статическом пространстве-времени $(M \times \mathbb{R}, -V^2 dt^2 + g)$ является сечением горизонта Киллинга?

Указание: Рассмотрите метрику $\mathfrak{g} = -V^2 dt^2 + \frac{1}{U^2} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-2}}$, где $V(r) = \sqrt{1 - \frac{2m_1}{r}}$, $U(r) = \sqrt{1 - \frac{2m_2}{r}}$ и $0 < m_1 < m_2$. Также выясните продолжается ли эта метрика на $r = 2m_1$.