Одномерная модель Изинга

$G = (V, E)$ - кольцо $V = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ $\qquad E = \{(i, i+1)\}_{i=1}^{N}$

$N \Rightarrow N+1 = 1$

$\sigma \in \{-1, 1\}^V \qquad \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \qquad \sigma_i = \pm 1$

$$\mathcal{H}(\sigma) = -J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} - h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i$$

Рассмотрим ферромагнетик: $J > 0$

Основное состояние: $h = 0$, $\operatorname{argmin}_{\sigma} \mathcal{H}(\sigma) = \begin{matrix} \sigma^0_+ \{\sigma_i = 1\}_{i \in V} \\ \sigma^0_- \{\sigma_i = -1\}_{i \in V} \end{matrix}$

$\mathbb{Z}_2$ симметрия: при $h = 0$ $\mathcal{H}(\sigma) = \mathcal{H}(-\sigma)$

Минимизация свободной энергии.

$$F(T, h) = \inf_{u} (u - TS(u)) = \inf_{\sigma} (\mathcal{H}(\sigma) - TS(\mathcal{H}(\sigma)))$$

$F(T=0, h=0) = \mathcal{H}(\sigma^0_+) = \mathcal{H}(\sigma^0_-)$ - свободная энергия минимизируется в одном из основных состояний, не смотря на то, что их энтропия минимальна, и нарушая таким образом симметрию.

Если с ростом энергии энтропия растёт не слишком быстро, при малых T ка сильно меняется: св. энергию минимизируют состояния в окрестности σ_+^0, σ_-^0.

При $T\to\infty$ $F(T,0)\simeq -T\sup_\sigma S(\mathcal{H}(\sigma))$

т.е. свободная энергия достигает минимума на состояниях, отвечающих энергии, максимизирующей энтропию, с максимальной симметрией. Если при некоторой температуре $T=T_c$ есть переход между двумя сценариями, то T_c - критическая точка.

Рассмотрим модель Изинга в окрестности σ_-^0, $h=0$

$$\sigma_-^0: \downarrow\downarrow\cdots\downarrow, \quad \mathcal{H}(\sigma_-) = -JN = E_0$$

На низшее состояние с большей энергией получаются образованием пар доменных стенок:

$$\sigma_1: \downarrow \,\vdots\, \uparrow \cdots \uparrow \,\vdots\, \downarrow\downarrow$$

$$\mathcal{H}(\sigma_1) = E_1 = E_0 + \Delta E, \quad \Delta E = 4J$$

Число конфигураций с энергией E_1:

$$\#\{\sigma;\ \mathcal{H}(\sigma)=E_1\} = \frac{N(N-1)}{2} \Rightarrow S(E_1) \approx 2\ln N$$

Энергия конф. с $2k$ стенками: $E_k = E_0 - k\Delta E$

Число: $\#\{\sigma;\ \mathcal{H}(\sigma)=E_1\} = C_N^{2k} \simeq \left[\left(\frac{2k}{N}\right)^{\frac{2k}{N}}\left(1-\frac{2k}{N}\right)^{1-\frac{2k}{N}}\right]^{-N}$

$S(E_k) = N \ln S_B\left(\frac{2k}{N}\right) \quad S_B(s) = -\left(s\ln s + (1-s)\ln(1-s)\right)$

При малых k $S(E_k) \simeq k\ln N$.

Мы видим, что при малых k энергия растет линейно по k и не зависит от N, а энтропия $S(E_k) = O(\ln N)$.

Энтропия выигрывает при $\forall T>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ В одномерных системах с конечной (или компактной) группой симметрии дальнего порядка быть не может $\Leftrightarrow$ нет фазового перех

Точное решение модели Изинга на кольце $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

$$Z_N(T,h) = \sum_\sigma e^{\frac{J}{T}\sum_i \sigma_i\sigma_{i+1} + \frac{h}{T}\sum_i \sigma_i} =$$

$$\sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\dots\sum_{\sigma_N=\pm1}\prod_{i=1}^N e^{\frac{J}{T}\sigma_i\sigma_{i+1}+\frac{h}{2T}(\sigma_i+\sigma_{i+1})}$$

Введем матрицу перехода:

$$\tau = \{T_{\sigma\sigma'}\}_{\sigma,\sigma'\in\{-1,1\}} \qquad T_{\sigma\sigma'} = e^{\frac{J}{T}\sigma\sigma'+\frac{h}{2T}(\sigma+\sigma')}$$

$$\frac{J}{T}=K, \ \frac{h}{T}=H$$

$$\tau = \begin{array}{c|cc} & 1 & -1 \\ \hline 1 & e^{K+H} & e^{-K} \\ -1 & e^{-K} & e^{K-H}\end{array} = \begin{pmatrix} e^{K+H} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-H}\end{pmatrix} = e^{K+H\sigma_z} + e^{-K}\sigma_x = e^K(\operatorname{ch} H + \sigma_z \operatorname{sh} H) + e^{-K}\sigma_x$$

$$Z_N(T,h) = \operatorname{Tr}\tau^N = \lambda_1^N + \lambda_2^N$$

Хар-е ур-е для τ: $\det(Id\cdot\lambda - \tau) = 0$

$$(e^{K+H}-\lambda)(e^{K-H}-\lambda) - e^{-2K} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda e^K \operatorname{ch} H + 2\operatorname{sh} 2K = 0$$

$$\lambda_\pm = e^K \operatorname{ch} H \pm \sqrt{e^{2K}\operatorname{ch}^2 H - 2\operatorname{sh} 2K}$$

При $K>0$ $e^{2K}\operatorname{ch}^2 H - 2\operatorname{sh} 2K \geq 0$ и $\lambda_+ > \lambda_- > 0 \in \mathbb{R}$

$$f_N(T,h) = \frac{F_N(T,h)}{N} = -\frac{T}{N}\ln(\lambda_+^N + \lambda_-^N) =$$

$$= -T\ln\lambda_+ - \frac{T}{N}\ln\left(1+\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^N\right) \to -T\ln\lambda_+$$

$$f(T,h) = -T\ln\left(e^{K}\operatorname{ch}H + \sqrt{e^{2K}\operatorname{ch}^2H - 2\operatorname{sh}2K}\right)$$

1) $h=0$

$$f(T,0) = -T\ln\left(e^{K} + \sqrt{e^{2K} - 2\operatorname{sh}2K}\right) =$$

$$= -T\ln\left(e^{K} + \sqrt{e^{-2K}}\right) = -T\ln 2\operatorname{sh}K =$$

$$= -T\ln 2\operatorname{ch}\frac{J}{T}$$

$$C_{h=0} = -T\frac{\partial^2 f}{\partial T^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial T} = -\ln 2\operatorname{ch}\frac{J}{T} + T\frac{\operatorname{sh}\frac{J}{T}}{\operatorname{ch}\frac{J}{T}}\frac{J}{T^2} = -\ln 2\operatorname{sh}\frac{J}{T} + \frac{J}{T}\operatorname{th}\frac{J}{T}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} = +\frac{J}{T^2}\operatorname{th}\frac{J}{T} - \frac{J}{T^2}\operatorname{th}\frac{J}{T} + \frac{J}{T}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{J}{T}}\right)\cdot\left(-\frac{J}{T^2}\right)$$

$$C_{h=0} = \frac{J^2}{T^2}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{J}{T}}$$ — гладкая при $T>0$

$$C_{h=0} \simeq \frac{J^2}{T^2} \quad \text{при } T\to\infty,$$

$$\simeq \frac{J^2}{T^2}\frac{e^{-\frac{2J}{T}}}{4} \longrightarrow 0 \quad T\to 0.$$

При $H=\frac{h}{T}\ll 1$ $\quad \operatorname{ch}H \simeq 1+\frac{H^2}{2}$ $\quad \operatorname{ch}^2H \simeq 1+H^2$

$$f(T,h) \simeq -T\ln\left(e^{K}\left(1+\frac{H^2}{2}\right) + \sqrt{e^{-2K} + e^{2K}H^2}\right) \simeq$$

$$\simeq -T\ln\left(e^{K}\left(1+\frac{H^2}{2}\right) + e^{-K}\left(1+\frac{e^{4K}H^2}{2}\right)\right) =$$

$$= -T\ln\left(2\operatorname{ch}K + \frac{H^2}{2}e^{2K}\operatorname{ch}K\right) =$$

$$f(T,h) \simeq f(T,0) - T\frac{H^2}{4}e^{2K} = f(T,0) - \frac{h^2}{4T}e^{2\frac{J}{T}}$$

$$m(h) = -\frac{\partial f}{\partial h} = \frac{h}{T}e^{2\frac{J}{T}} \quad \text{при } h \ll T$$

$$\chi = \left.\frac{\partial m}{\partial h}\right|_{h=0} = \frac{e^{\frac{2J}{T}}}{T} \qquad (\text{при } T \gg J \text{ - закон Кюри})$$

Малые температуры: $sh 2K \simeq \frac{e^{2K}}{2}$

$$f(T,h) = -T\ln\left(e^K ch H + \sqrt{e^{2K}ch^2 H - 2sh\,2K}\right) \simeq$$

$$\simeq -T\ln e^K\left(chH + \sqrt{sh^2 H}\right) \simeq -J - T|H| = -J - |h|$$

$$m(h) = -\frac{\partial f}{\partial h} \xrightarrow[h\to 0]{} sgn\, h \quad - \text{при } T\to 0$$

Некоммутативность пределов:

$$\lim_{T\to 0}\lim_{h\to\pm 0} m(h) = 0 \neq \lim_{h\to\pm 0}\lim_{T\to 0} m(h) = \pm 1$$

Кажется, что мы приблизились к точке перехода сверху.

Корреляционные ф-ии:

$$\langle \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\dots\sigma_{i_n}\rangle = \frac{1}{Z}\sum_\sigma \sigma_{i_1}\dots\sigma_{i_n} e^{-\frac{\mathcal{H}(\sigma)}{T}} =$$

$$= \frac{1}{Z}\sum_\sigma \tau_{\sigma_1\sigma_2}\dots\tau_{\sigma_{i_1-1}\sigma_{i_1}}\underbrace{\sigma_{i_1}\tau_{\sigma_{i_1}\sigma_{i_1+1}}}_{\sigma_{i_1}\delta_{\sigma_{i_1}\sigma_{i_1}'}\tau_{\sigma_{i_1}'\,i_1+1}}\dots\tau_{\sigma_{i_2-1}\sigma_{i_2}}\sigma_{i_2}\tau_{\sigma_{i_2}\sigma_{i_2+1}}\dots\tau_{\sigma_N\sigma_1}$$

$$\langle \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_n} \rangle = \frac{1}{Z} \operatorname{Tr} \left(\tau^{i_1} \sigma^z \tau^{i_2 - i_1} \sigma^z \dots \right)$$

Построим собств. базис матрицы τ:

$$\tau |v_\pm\rangle = \lambda_\pm | \pm \rangle \qquad \tau = \lambda_+ |v_+\rangle\langle v_+| + \lambda_- |v_-\rangle\langle v_-|$$

$$\langle v_+ | v_+ \rangle = \langle v_- | v_- \rangle = 1 \qquad \langle v_+ | v_- \rangle = 0$$

$$|v_+\rangle\langle v_+| + |v_-\rangle\langle v_-| = Id$$

$$\langle \sigma_1 \rangle = \frac{1}{Z_N} \operatorname{Tr} (\sigma_z \tau^N) = \frac{1}{Z_N} \frac{\partial Z_N}{\partial H} \Longleftrightarrow \frac{\partial \tau}{\partial h} = \frac{\tau \sigma_z + \sigma_z \tau}{2}$$

$$\langle \sigma_{i_1} \rangle = \frac{1}{Z_N} \operatorname{Tr} (\sigma_z \tau^N) = \frac{1}{Z} \left(\langle v_+ | \sigma^z \tau^N | v_+ \rangle + \langle v_- | \sigma^z \tau^N | v_- \rangle \right)$$

$$= \frac{1}{Z_N} \left(\langle v_+ | \sigma^z | v_+ \rangle \lambda_+^N + \langle v_- | \sigma^z | v_- \rangle \lambda_-^N \right) =$$

$$= \frac{\langle v_+ | \sigma^z | v_+ \rangle \lambda_+^N + \langle v_- | \sigma^z | v_- \rangle \lambda_-^N}{\lambda_+^N + \lambda_-^N} \xrightarrow[N \to \infty]{\lambda_+ > \lambda_-} \langle v_+ | \sigma^z | v_+ \rangle =$$

$$= \frac{\partial \ln \lambda_1}{\partial H}$$

$$Id = \sum_i |v_i\rangle\langle v_i| \qquad Id \qquad Id \qquad Id$$

$$\langle \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \rangle = \frac{1}{Z} \operatorname{Tr} \left(\tau^{i_1} \sigma_z \tau^{i_2 - i_1} \sigma_z \tau^{N - i_2} \right) =$$

$$= \frac{\lambda_+^N |\langle v_+ | \sigma_z | v_+ \rangle|^2 + \left(\lambda_+^{i_2 - i_1} \lambda_-^{N - i_2 + i_1} + \lambda_-^{i_2 - i_1} \lambda_+^{N - i_2 + i_1} \right) |\langle v_- | \sigma_z | v_+ \rangle|^2 + \lambda_-^N \langle v_- | \sigma_z | v_- \rangle}{\lambda_+^N + \lambda_-^N} =$$

(пусть $|i_2 - i_1| \ll N$)

$$= \frac{\langle \sigma_{i_1} \rangle \langle \sigma_{i_2} \rangle + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^{i_2 - i_1} |\langle v_- | \sigma_z | v_+ \rangle|^2 + O(e^{-N})}{1 -}$$

$$\langle \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \rangle - \langle \sigma_{i_1} \rangle \langle \sigma_{i_2} \rangle \simeq \left| \langle v_- | \sigma_z | v_+ \rangle \right|^2 \cdot e^{-\frac{|i_1 - i_2|}{\xi}}$$

$$\boxed{\xi = \left(\ln \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right)^{-1}}$$ — корреляционная длина, она же обратная масса.

Когда $\lambda_+/\lambda_- \to 1$, $\xi \to \infty$. Исчезновение щели в спектре — признак фазового перехода.

При $T \to 0$ $K \to \infty$

$H \neq 0$

$$\lambda_\pm = e^K \operatorname{ch} H \pm \sqrt{e^{2K} \operatorname{ch}^2 H - 2 \operatorname{sh} 2K} \simeq e^K \operatorname{ch} H \pm \sqrt{e^{2K}(\operatorname{ch}^2 H - 1)}$$

$$= e^K \left(\operatorname{ch} H \pm \sqrt{\operatorname{sh} |H|^2} \right) = e^K e^{\pm |H|}$$

$$\lambda_+/\lambda_- = e^{2|H|} \qquad \xi = \frac{1}{2|H|} < \infty$$

При $H = 0$

$$K \to \infty \quad \operatorname{cth} K = \frac{1 + e^{-2K}}{1 - e^{-2K}} \simeq 1 + 2e^{-2K}$$

$$\lambda_\pm = e^K \pm \sqrt{e^{-2K}} = e^K \pm e^{-K} = \begin{cases} 2 \operatorname{ch} K \\ 2 \operatorname{sh} K \end{cases}$$

$$\lambda_+/\lambda_- = \operatorname{cth} K \qquad \xi = \frac{1}{\ln \operatorname{cth} K} \simeq \frac{e^{2K}}{2} = \frac{e^{\frac{2J}{T}}}{2} \xrightarrow[T \to 0]{} \infty$$