





Магнитные системы.

Общая формулировка:

Дан простой связный граф $G = (E, V)$

Классическая формулировка:

Пространство конфигураций одного узла:

Ω — изотермическое пространство с мерой μ_0

Пространство конфигураций системы:

$$\Gamma = \Omega^V \text{ с мерой } \mu_0^{\otimes V}$$

Ф-я Гамильтона $\mathcal{H} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}(\sigma) = \sum_{i \in V} \mathcal{F}_1(\sigma_i) + \sum_{(i,j) \in E} \mathcal{F}_2(\sigma_i, \sigma_j) + \dots$$

(•) Вместо графа $G = (V, E)$ можно рассматривать гиперграф

где E — мн-во гиперребер, которые включают не только пары вершин, но и тройки и т.д.

Это соответствует тому, что ф-я Гамильтона

включает не только парные взаимодействия, но

и тр

(*) Пространство Ω либо конечное, либо счетное ии-во, Тогда μ_0 -счетные меры.

Другой пример Ω - многообразие ассоциированное с некоторой группой L (например $O(n)$), а μ_0 -мера Хаара на группе.

Квантовая формулировка

H - однокольное гильбертово пр-во,

$H_\zeta = H^{\otimes V}$, гамильтониан $\hat{H}_\zeta \in \text{End}(H_\zeta)$

$$\hat{H}_\zeta = \sum_{i \in V} \hat{f}_i + \sum_{(i,j) \in E} \hat{f}_{ij}^{+...}, \text{ где } \hat{f}_i, \hat{f}_{ij} \in \text{End}(H_f).$$

$$\text{и } \hat{f}_i = \text{Id} \otimes \dots \otimes \text{Id} \otimes \hat{f} \otimes \text{Id} \otimes \dots \otimes \text{Id}$$

1 ... i ... |V|

$\hat{f}_{ij}$ нетривиально действует в компонентах

i и j и тождественно в остальных

μ_0 -спектральные мера $\hat{H}_\zeta$

(*) $\hat{f}_i, \hat{f}_{ij}$: часто предполагается,

что H реализует представление некоторой группы L . Тогда $\hat{f}_i, \hat{f}_{ij}$ строятся из

генераторов соответствующей алгебры L .

Примеры:

(Кюри-Вейсса)

модель Изинга^V, спин S_i , $\Omega = \{-S, -S+1, \dots, S\}$
 $\sigma = (S_1, \dots, S_{|V|})$ $\mu_0 = \sum_{k=-S}^S S_k$

$$\mathcal{H}(\sigma) = -J \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} S_i S_j - h \sum_{i \in V} S_i \quad S_i = -S, \dots, S$$

$J > 0$ - ферромагнитная, $J < 0$ - антиферромагнитная

$O(n)$ -модель (классическая модель Гейзенберга)

$$\sigma = (\vec{S}_1, \dots, \vec{S}_{|V|}) \quad \Omega = \{ \vec{S} \in \mathbb{R}^n : |\vec{S}| = 1 \}$$

$$\mathcal{H}(\sigma) = -J \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} (\vec{S}_i, \vec{S}_j) - \sum_i (\vec{S}_i, \vec{h})$$

$d\mu_0 = dV$ - равномерная мера на S_{n-1}

Гауссова модель:

$$\Omega = \mathbb{R} \quad d\mu_0 = dx$$

$$\mathcal{H}(\sigma) = + \sum_i \frac{S_i^2}{2\sigma} - J \sum_{i,j} S_i S_j - h \sum_i S_i$$

Квантовая модель Гейзенберга:

$$\text{спин } 1/2: \quad \mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \quad \mathcal{H}_G = (\mathbb{C}^2)^{\otimes V}$$

$\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$ - матрицы Паули (генераторы

алгебры $\mathfrak{su}(2)$)

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Введем $\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z \in \text{End}(H_q)$

$$\sigma_i^z = \underset{1}{Id} \otimes \dots \otimes \underset{i}{\sigma} \otimes \dots \otimes \underset{|V|}{Id}$$

$$\hat{H} = - \sum_{(i,j) \in G} \bar{J}_x \sigma_i^x \sigma_j^x + \bar{J}_y \sigma_i^y \sigma_j^y + \bar{J}_z \sigma_i^z \sigma_j^z - h \sum_{i \in V} \sigma_i^z$$

$\bar{J}_x = \bar{J}_y = \bar{J}_z$ - изотропная модель (XXX)

$\bar{J}_x \neq \bar{J}_y \neq \bar{J}_z$ - анизотропная - (XYZ)

$\bar{J}_x = \bar{J}_y = 0$ - модель Изинга.

Примеры. Независимые магнитные моменты (спины) в магн. поле.

1) Изинга $\bar{J} = 0$ $T, h, |V| = N$ - ансамбль

$$H = -h \sum_i s_i \quad s_i \in \{-s, \dots, s\}$$

$$Z_{T,h,N} = \sum_{\sigma} e^{-\frac{1}{T}(-h \sum s_i)} = \left(\sum_{k=-s}^s e^{+\left(\frac{h}{T}k\right)} \right)^N = \left(e^{-\frac{sh}{T}} \sum_{k=0}^{2s} e^{\frac{hk}{T}} \right)^N$$

$$= \left(e^{-\frac{sh}{T}} \frac{1 - e^{\frac{h}{T}(2s+1)}}{1 - e^{\frac{h}{T}}} \right)^N = \frac{e^{-(s+\frac{1}{2})\frac{h}{T}} - e^{\frac{h}{T}(s+\frac{1}{2})}}{e^{-\frac{h}{2T}} - e^{\frac{h}{2T}}} =$$

$$= \left(\frac{\text{sh}\left(\frac{h}{T}\left(s+\frac{1}{2}\right)\right)}{\text{sh}\left(\frac{h}{2T}\right)} \right)^N$$

$$F(T, h, N) = -TN \ln \frac{\sinh(\frac{h}{T}(S + \frac{1}{2}))}{\sinh(\frac{h}{2T})} = -N \ln(1 + 2S) - \frac{N S(1+S) h^2}{6T} + O(\frac{h}{T})$$

$h \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty)$

Теплоемкость:

$$C_h = T \frac{\partial S}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \approx \frac{N S(1+S) h^2}{3T^2}$$

Магнитная емкость: при $h \rightarrow 0$

$$M = - \frac{\partial F}{\partial h} = + \frac{N S(1-S)}{3T} h$$

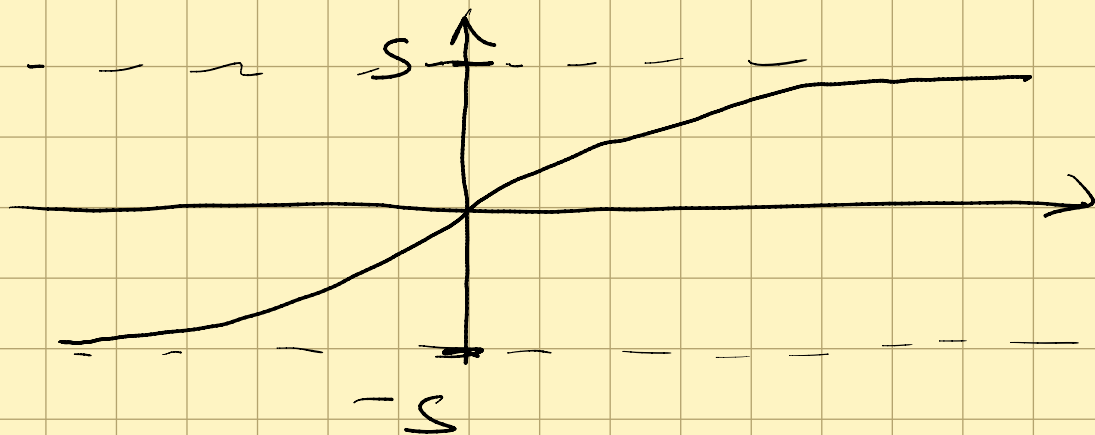
$$\chi_T \Big|_{h \rightarrow 0} = \frac{\partial M}{\partial h} \Big|_{h \rightarrow 0} = \frac{N S(1-S)}{3T} \quad \text{— закон Кюри} \quad \chi_T = \frac{1}{T} (\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2)$$

при $\frac{h}{T} \rightarrow \infty$

$$F \approx -T \left(\frac{h}{T} S + O\left(\left(\frac{h}{T}\right)^3\right) \right) = -N h S + O(h e^{-\frac{h}{T}})$$

1) $C_h = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = 0 \quad \text{т. е.} \quad C_h \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0 \quad (\text{третий закон})$

$$M = - \frac{\partial F}{\partial h} = S \cdot N \quad \chi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0$$



Классический момент:

$$\Omega = S_2$$

$$\vec{h} \parallel \vec{e}_2$$

$$|\vec{S}_i| = S \quad S_i = (\theta, \varphi)$$

$$\mathcal{H} = -\sum_i (\vec{S}_i \cdot \vec{h}) = -h \cdot S \sum_i \cos \theta_i$$

$$Z_{T,h,N} = \int d\Omega^N e^{+\frac{Sh}{T} \sum \cos \theta_i} = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi e^{\frac{Sh}{T} \cos \theta} \right)^N$$

$$= \left(2\pi \int_{-1}^1 e^{\frac{Sh}{T} x} dx \right)^N = \left(\frac{2\pi T}{Sh} 2 \operatorname{sh} \left(\frac{Sh}{T} \right) \right)^N$$

$$F = -NT \left[\ln \left(\frac{4\pi T}{Sh} \operatorname{sh} \left(\frac{Sh}{T} \right) \right) \right]$$

$$\frac{h}{T} \ll 1 \quad F \approx -NT \ln \left(4\pi \left(1 + \left(\frac{Sh}{T} \right)^2 \frac{1}{6} \right) \right) \approx$$

$$\approx -NT \ln 4\pi - \frac{(Sh)^2}{T} \frac{1}{6}$$

$$C_h \approx -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \approx \frac{(Sh)^2}{3T^2}$$

$$M = -\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{S^2}{3T} \circ h$$

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial h} = \frac{S^2}{3T}$$

$$\frac{h}{T} \gg 1$$

$$F \approx -S \circ N \circ h$$

$$M \rightarrow SN$$

$$\chi \rightarrow 0$$

$$C_h \rightarrow 0$$

Модели со взаимодействиями:

Модель Кюри-Вейсса (Изинга)

q -регулярный граф: $V = \{1, \dots, N\}$, $E = \{(i, j)\}_{i < j}$

$$S_i = \pm 1.$$

$$\mathcal{H}(\sigma) = -\frac{J}{N} \sum_{(i,j)} S_i S_j - h \sum_i S_i$$

$$Z_{T,h,N} = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{\frac{J}{TN} \sum_{(i,j)} S_i S_j + \frac{h}{T} \sum_i S_i} =$$

$$= \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^N} e^{\frac{J}{NT+2} \left(\left(\sum_i S_i \right)^2 - \sum_i S_i^2 \right) + \frac{h}{T} \sum_i S_i} =$$

$$= e^{-\frac{JN}{2T}} \sum_{\sigma} e^{\frac{J}{2TN} \left(\sum_i S_i \right)^2 + \frac{h}{T} \sum_i S_i} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{JN}{2T}}}{\sqrt{2\pi \frac{J}{T}}} \sum_{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t - \frac{h}{T})^2}{2 \frac{J}{T}}} e^{t \sum_i S_i} dt =$$

$$= \frac{e^{-\frac{J}{2T}}}{\sqrt{2\pi \frac{J}{TN}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t - \frac{h}{T})^2 NT}{2J}} \left(2 \cosh t \right)^N dt =$$

$$\begin{aligned} \langle e^{\gamma N(\phi, \sigma)} \rangle &= \\ &= e^{\frac{\sigma^2 \gamma^2}{2} + \mu \sigma} \\ e^{\frac{a}{2} x^2 + b x} &= \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-b)^2}{2\sigma^2}} e^{xt} dt}{\sqrt{2\pi \sigma^2}} \\ &\text{Хаббард-Ситаронович} \end{aligned}$$

$$= e^{-\frac{J}{2T}} \sqrt{\frac{NT}{2\pi J}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{N \left(-\frac{T}{2J} \left(t - \frac{h}{T} \right)^2 + \ln 2 \cosh t \right)} dt$$

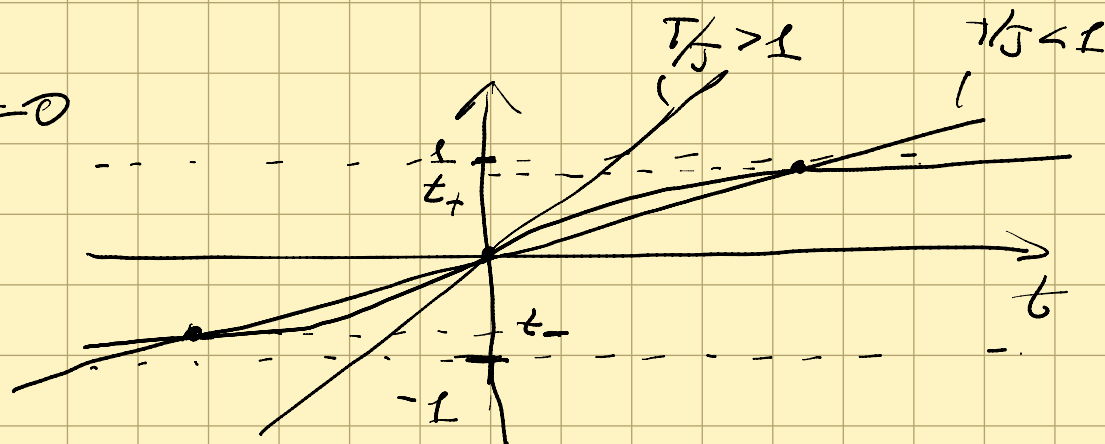
$$= e^{-\frac{J}{2T}} \sqrt{\frac{NT}{2\pi J}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-N \Phi_{h,T}(t)} dt$$

$$\phi_h(t) = \left(+ \frac{T}{2J} \left(t - \frac{h}{T} \right)^2 - h \operatorname{arctanh} t \right)$$

Минимум функции ($\nu \rightarrow \infty$):

$$\phi'_{h, T}(t) = 0 \Rightarrow \frac{T}{J} \left(t - \frac{h}{T} \right) - \operatorname{arctanh} t = 0$$

1) $h=0$



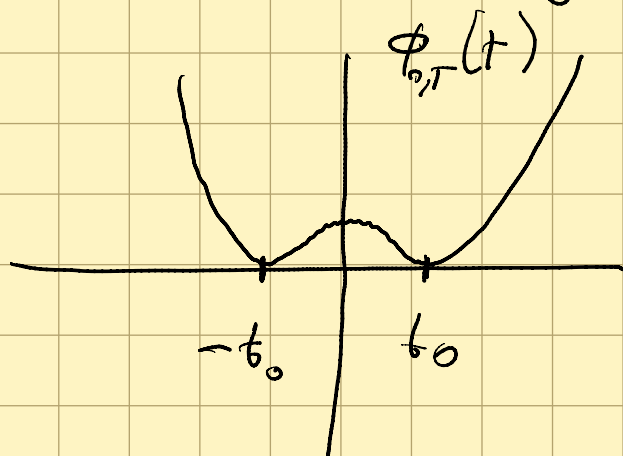
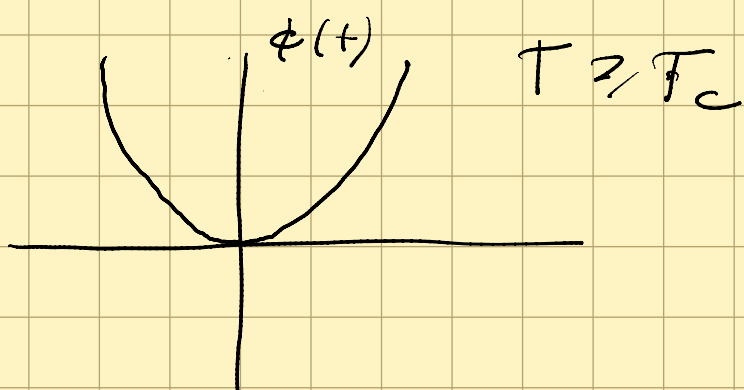
$$\frac{T}{J} \cdot t = \operatorname{arctanh} t$$

$$T > T_c = J \quad t_0 = 0$$

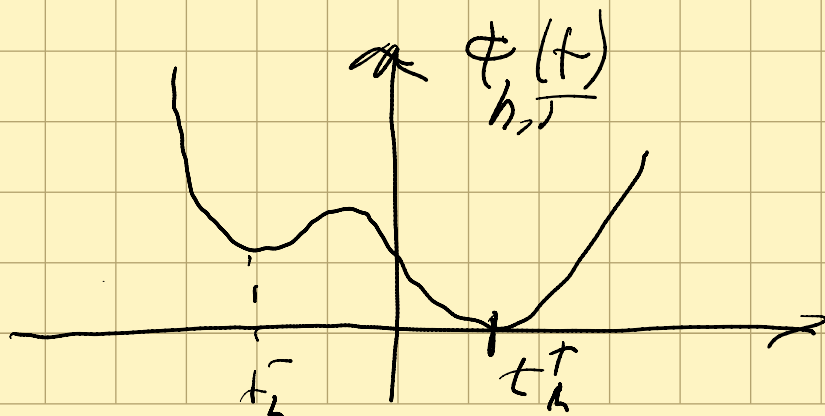
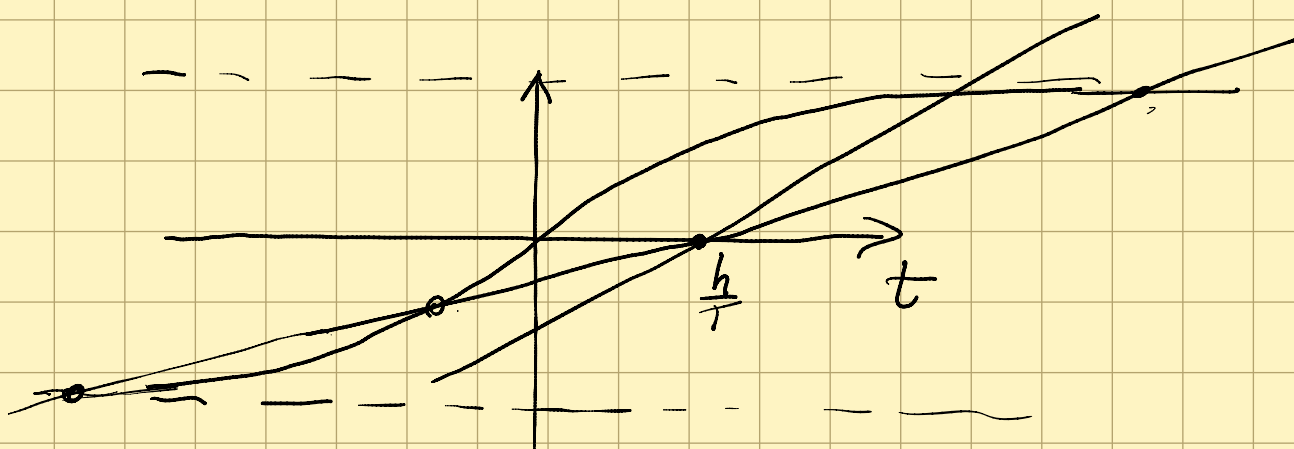
$$\operatorname{argmin}_{0, T} \phi_{0, T}(t)$$

$$T < T_c \quad \operatorname{argmax}_{0, T} \phi_{0, T}(t) = 0$$

$$\operatorname{argmin}_{0, T} \phi(t) = t_{\pm} = \pm t_0$$



2) $h \neq 0$ ($h > 0$)



$$Z \simeq e^{-N \sup_t \phi_{h,T}(t)} e^{-\frac{J}{2T}}$$

Параметры: $m_N = \frac{M}{N} = \langle S_i \rangle = -\frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial h}$

$$F = \frac{J}{2} - T \left(\frac{1}{2} \ln \frac{NT}{2\pi J} + \ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-N \left(\frac{J}{2S} \left(t - \frac{h}{T} \right)^2 - \ln 2 \cosh t \right)} dt \right)$$

$$m_N(h, T) = \frac{\frac{1}{J} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{h}{T} \right) e^{-N \phi_{h,T}(x)} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-N \phi(x)} dx}$$

T_0 K_0 $\phi_{0,T}(1) = \phi_{0,T}(\) \Rightarrow m_N(h) = 0$

Но $\lim_{h \rightarrow \pm 0} \lim_{N \rightarrow \infty} m_N(h, T) = 0$ при $T > T_c$
 $= \pm \frac{t_0}{J}$ при $T < T_c$

Корр. ф-а:

$$g_{ij} = \langle S_i S_j \rangle_c = \langle S_i S_j \rangle - m_N^2$$

$$\begin{aligned} +T\chi_T &= -T \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} = \langle (\sum_i S_i)^2 \rangle_c = \langle \sum_i S_i^2 + 2 \sum_{i < j} S_i S_j \rangle_c = \\ &= 2 \sum_{i < j} \langle S_i S_j \rangle_c = N(N-1) \langle S_i S_j \rangle_c \end{aligned}$$

Покажите, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_i S_j \rangle_c \rightarrow 0$ при $T > T_c$
 $\rightarrow 0$ при $T < T_c$

Критические индексы:

$$\Phi(x) = \frac{T}{2J} \left(x - \frac{h}{T}\right)^2 - \ln 2 \cosh x$$

При $T \rightarrow T_c = J$ $x_0 \rightarrow 0$, разложим $\Phi(x)$ по x

$$\Phi(x) \approx \frac{h^2}{2TJ} - \frac{h}{J} \cdot x + \frac{T}{2J} \cdot x^2 - \ln 2 - \ln \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)$$

$$\approx \frac{h^2}{2TJ} - \frac{h}{J} \cdot x + \frac{T}{2J} x^2 - \ln 2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{4}$$

$$\Phi(t) \approx -\ln 2 + \frac{h^2}{2TJ} - x \frac{h}{J} + \frac{x^2}{2} \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) + \frac{5}{24} x^4 + \dots$$

$$1) h=0 \quad \Phi'(t) = 0 \Rightarrow x \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) + \frac{5}{6} x^3 = 0 \quad \boxed{t_0 = \frac{T - T_c}{T_c}}$$

$$x \left[t + \frac{5}{6} x^2 \right] = 0$$

$$t > 0 \quad x_0 = 0$$

$$t < 0 \quad x_0 = 0, \quad x_0 = x_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{6}{5} t}$$

$$F = +N T_c \Phi(x_0) \approx -\ln 2 - \frac{6}{5} \frac{t^2}{2} + \frac{5}{24} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot t^4$$

$$C_{h=0} = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \approx -\frac{T_c}{T_c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{6}{5}$$

$$T < T_c \Rightarrow \alpha_{\pm} = 0$$

$$T > T_c$$

$$m_N \sim |T - T_c|^{1/2}$$

$$M < T_c$$

$$m_N(T_c) \sim h^{1/5}$$

$$\delta = 1/5$$

$$\lambda = \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} = - \begin{cases} \frac{1}{2a(T - T_c)} & T < T_c \\ -\frac{1}{2a(T - T_c)} & T > T_c \end{cases} \quad \gamma = 1$$

Теория среднего поля для модели Изинга.

$$G \in (V, E) \quad V \subset \mathbb{Z}^d \quad |V| = N$$

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2} \sum_{\vec{r}, \vec{r}'} J(\vec{r} - \vec{r}') \sigma_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}'} - h \sum_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}} \quad J(\vec{r}) = J(-\vec{r})$$

$$\mathcal{H}(\sigma) \approx -\frac{1}{2} \sum_{\vec{r}, \vec{r}'} J(\vec{r} - \vec{r}') ((\sigma_{\vec{r}} - m) + m) ((\sigma_{\vec{r}'} - m) + m) - h \sum_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}}$$

$$= -\frac{m^2}{2} \sum_{\vec{r}, \vec{r}'} J(\vec{r} - \vec{r}') - m \sum_{\vec{r} \neq \vec{r}'} J(\vec{r} - \vec{r}') \sigma_{\vec{r}} - h \sum_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}} - \frac{1}{2} \sum_{\vec{r}, \vec{r}'} J(\vec{r} - \vec{r}') (\sigma_{\vec{r}} - m) (\sigma_{\vec{r}'} - m)$$

$$\sum_{\vec{r}} J(\vec{r}) = J \quad \sum_{\vec{r}, \vec{r}'} J(\vec{r} - \vec{r}') = VJ$$

$$\mathcal{H}(\sigma) = -\frac{m^2}{2} VJ - (Jm + h) \sum_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\vec{r}, \vec{r}'} J(\vec{r} - \vec{r}') (\sigma_{\vec{r}} - m) (\sigma_{\vec{r}'} - m) \quad - \text{фуктуации}$$

При вычислениях считаем

так,

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\frac{\mathcal{H}(\sigma)}{T}} \approx \sum_{\{\sigma_{\vec{r}} = \pm 1, r \in V\}} e^{-\frac{m^2 N J}{2T} + \left(\frac{Jm + h}{T}\right) \sum_{\vec{r}} \sigma_{\vec{r}}}$$

$$= e^{\frac{m^2 N J}{2T}} \left(\cosh \left(\frac{Jm + h}{T} \right) \right)^N$$

$$F = -T \ln Z = + \frac{m^2 N J}{2} - N T \ln 2 \cosh \left(\frac{J m + h}{T} \right) -$$

- совпадает с св. энерг. полученным для модели изинга на решетке графа

чтобы минимизировать последнее слагаемое
потребует, чтобы $\boxed{\langle \sigma_i \rangle = m}$ - ур-е
среднего
поля.

$$\frac{\partial F}{\partial h} = m$$

$$T_c = J$$

$$T > T_c \quad \text{при} \quad h = 0 \quad m = 0 \quad t = \frac{T - T_c}{T_c}$$

$$T < T_c \quad \text{при} \quad h = 0 \quad m = \pm \sqrt{-3t} \quad \beta = \frac{1}{2}$$

$$T \rightarrow T_c - 0$$

$$C_{H=0} = \frac{J}{2}$$

$$\alpha \neq 0$$

$$T \rightarrow T_c + 0$$

$$C_{H=0} = 0$$

$$h \approx T_c M^3$$

$$\delta = 3$$

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial h}$$

$$\chi \approx \begin{cases} \frac{1}{T - T_c} \\ \frac{1}{2(T - T_c)} \end{cases} \quad t \rightarrow \pm 0$$

$$T > T_c$$

$$T < T_c$$

$$\delta \neq 1$$

Флуктуации и функция Грина:

Рассмотрим неоднор. ситуацию: $h \rightarrow h(r)$, $m \rightarrow m(r)$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \sum_{r, r'} J(r - r') m(r) m(r') - \sum_{r, \sigma} J(r - r') m(\sigma) \sigma_r - \sum_r h(r) \sigma_r \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r, \sigma'} (\sigma_r - m(r)) (\sigma_{r'} - m(r')) \end{aligned}$$

$$Z = \sum_{\{s\}} e^{-\frac{\mathcal{H}(s)}{T}}$$

$$F(T, h(0)) = -T \ln Z$$

$$m(r) = \langle s(r) \rangle = - \frac{\delta F}{\delta h(r)}$$

$$F(T, h(r)) = - \frac{1}{2} \sum_{r, r'} J(r-r') m(r) m(r')$$

$$- T \sum_r h(r) \left(2ch \left(\frac{1}{T} \sum_{r'} m(r') J(r-r') + h(r) \right) \right)$$

$$m(r) = - \frac{\delta F}{\delta h(r)} = \tanh \left(\frac{1}{T} \left(\sum_{r'} m(r') J(r-r') + h(r) \right) \right)$$

Решим $h(r)$ и $m(r)$ малю

$$m(r) = \frac{1}{T} \sum_{r'} m(r') J(r-r') + \frac{h(r)}{T} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sum_{r'} m(r') J(r-r')}{T} \right)^3 - \frac{h(r)}{T} \left(\frac{1}{T} \sum_{r'} m(r') J(r-r') \right)^2 + O(h^2) \dots$$

Корреляционная ф-я:

$$\left. \frac{\delta m(r)}{\delta h(r')} \right|_{h=0} = \frac{1}{T} \langle \sigma_r \sigma_{r'} \rangle_c = \frac{1}{T} \left(\langle \sigma_r \sigma_{r'} \rangle - \langle \sigma_r \rangle \langle \sigma_{r'} \rangle \right)$$

$$\langle \sigma_r \sigma_{r'} \rangle =: G(r-r') = \frac{1}{T} \sum_{r''} G(r''-r') J(r-r'') + \delta(r-r') \left(1 - \left(\frac{m J}{T} \right)^2 \right)$$

$$- \frac{1}{T} \left(\frac{m J}{T} \right)^2 \sum_{r''} G(r'-r'') J(r-r'')$$

$$G(r-r') = \frac{1}{T} \left(1 - \left(\frac{mT}{T} \right)^2 \right) \sum_{r''} \delta(r'' - r') G(r-r') =$$

$$= \left(1 - \left(\frac{mT}{T} \right)^2 \right) \delta(r-r')$$

$$G(r) = \sum_q \hat{G}(q) e^{iqr}$$

$$J(r) = \sum_q \hat{J}(q) e^{iqr} \simeq J(1 - R^2 q^2) + O(q^4)$$

$$\hat{G}(q) \left(1 - \frac{1}{T} \left(1 - \left(\frac{mT}{T} \right)^2 \right) J(1 - R^2 q^2) \right) = \left(1 - \left(\frac{mT}{T} \right)^2 \right)$$

$$\hat{G}(q) = \frac{1 - \left(\frac{mT}{T} \right)^2}{\left(1 - \frac{J}{T} \left(1 - \left(\frac{mT}{T} \right)^2 \right) \right) + \frac{J}{T} \left(1 - \left(\frac{mT}{T} \right)^2 \right) R^2 q^2} =$$

$$= \frac{T}{J} \frac{\left(\frac{J}{R^2} \right)}{1 + \frac{J}{T} q^2}$$

$$\xi^2 = \frac{\frac{T}{J} \left(1 - \left(\frac{mT}{T} \right)^2 \right) R^2}{1 - \frac{J}{T} \left(1 - \left(\frac{mT}{T} \right)^2 \right)}$$

$$T \rightarrow T_c = T$$

$$t > 0 \quad m = 0$$

$$\xi^2 = \frac{R^2}{1 - \frac{J}{T}} = \frac{R^2}{t}$$

$$\xi \simeq \frac{R}{\sqrt{t}} \quad \nu = \frac{1}{2}$$

$$t < 0 \quad m = \sqrt{-3t}$$

$$\xi^2 \simeq \frac{R^2}{1 - \frac{T_c}{T} - 3t} = \frac{1}{2t}$$

$$\xi \simeq \frac{R}{\sqrt{-2t}} \quad \nu = \frac{1}{2}$$

Восприимчивость : $\chi_T = \frac{1}{T} \hat{G}(0) = \frac{1}{T} \left(\frac{\xi}{R} \right)^2 = \frac{1}{T} \begin{cases} \frac{1}{t} & t > 0 \\ -\frac{1}{2t} & t < 0 \end{cases}$

Координатный вид:

$$\hat{G}(q) = \frac{1}{J} \frac{\left(\frac{r^2}{R^2}\right)}{1 + q^2 \frac{r^2}{R^2}}$$

$$B = \left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]^d$$

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{JR^2} \int_B \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\vec{r} \cdot \vec{q}}}{\frac{r^2}{R^2} + q^2} = \frac{1}{JR^2} \int_0^\infty dx \int_B \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r} - x\left(\frac{r^2}{R^2} + q^2\right)}$$

$$\int_{\frac{1}{2\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} e^{-xk^2 - ikr} \frac{dk}{2\pi} \approx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xk^2 - ikr} \frac{dk}{2\pi} = \frac{e^{-\frac{r^2}{4x}}}{2\sqrt{\pi x}}$$

$$\frac{r^2}{R^2} \rightarrow \infty \quad r^2 \rightarrow \infty \quad \frac{r^2}{R^2} \rightarrow \infty$$

$$\textcircled{22} \quad \frac{1}{JR^2} \int_0^\infty dx \frac{e^{-\frac{r^2}{4x} - \frac{r^2}{R^2} x}}{(2\sqrt{\pi x})^d} = \frac{1}{JR^2} \int_0^\infty dx \frac{e^{-r\frac{1}{R} \left(\frac{r}{4x} + \frac{x}{R}\right)}}{(2\sqrt{\pi x})^d}$$

$$= \frac{1}{JR^2} \frac{(r\frac{1}{R})^{1-\frac{d}{2}}}{2^{\frac{d}{2}} \pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^\infty \frac{e^{-r\frac{1}{R} \left(\frac{y}{4} + \frac{1}{y}\right)} dy}{y^{\frac{d}{2}}} \approx$$

$$f(y) = \frac{y}{4} + \frac{1}{y}$$

$$f'(y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{y^2}$$

$$y=2$$

$$f''(2) = +\frac{1}{4}$$

$$f(2) = 1$$

$$\approx \frac{1}{JR^2} \frac{e^{-\frac{r}{2}}}{2^{\frac{d}{2}} \pi^{\frac{d}{2}} (r\frac{1}{R})^{\frac{d}{2}-1} \sqrt{\pi/2} \frac{r}{R}} =$$

$$= \frac{1}{JR^2} \frac{e^{-\frac{r}{2}}}{2^{d-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{d+1}{2}} r^{\frac{d-1}{2}} \frac{1}{R^{\frac{d}{2}-\frac{3}{2}}}}$$

Метод перевала работает при: $\frac{r}{R} \gg 1$!

При $z \rightarrow \infty$ $\hat{G}(q) = \frac{T}{J R^2} \frac{1}{q^2}$, что соответствует
исходному уравнению: $\Delta G(r) = \frac{T}{J R^2} \delta^d(r)$

Это уравнение Пуассона с точечным источником.

Его решение - потенциал Кунда:

$$d=1 \quad G(r) = \frac{T R^2}{2J} |x|, \quad d=2 \quad G(r) = \frac{T R^2}{2J} \ln r, \quad d>2 \quad G(r) = \frac{T R^2}{2J} \frac{1}{r^{d-2}}$$

Когда метод среднего поле верен?

$$\left\langle \sum_i J(r-r') (\sigma_i - m) (\sigma_{i'} - m) \right\rangle \ll m^2 \cdot N \cdot J$$

$$\sum_{r, r'} G(r) J(r) = N \sum_r G(r) J(r) \approx N \int d^d q \hat{G}(q) J(q)$$

$$\approx \frac{N T}{J R^2} \int \frac{z^2}{1 + q^2 z^2} J(q) d^d q = \frac{N T}{J R^2} \int \frac{z^{2-d}}{1 + q^2} J\left(\frac{q}{z}\right) d^d q \approx$$

$$\approx \frac{N T}{J R^2} z^{2-d}$$

$$\frac{z^{2-d}}{R^2} \ll m^2 \approx t \approx \left(\frac{R}{z}\right)^2$$

$$\frac{z^{4-d}}{z^2} \ll R^4 \quad - \text{критерий Гинзбурга}$$

Выполнен $z \rightarrow \infty$, когда $d > 4$, d - верхняя кр.

размерность.

Теория Ландау.

Вблизи точки фазового перехода 2-го рода корреляционная длина велика.

Поэтому микроскопическая структура системы оказывается не важна - не расстояниях больших, чем корреляционная длина, задача становится эффективно теоретико-полевой. Характер фазового перехода зависит только от глобальных симметрий системы. Теория Ландау - способ написать теорию среднего поля для систем с заданной симметрией. Это теория точна в размерности выше критической, тогда как в меньших размерностях флуктуации становятся существенными. В последнем случае теория Ландау служит базой для изучения критических явлений.

Добавляя к ней релевантные возмущения можно учесть флуктуации.

Рассмотрим пример модели Изинга.

Вместо рассмотрения микроскопических конфигураций $\{\sigma\}$ будем изучать будем изучать величину намагниченности $m(r)$, полученную усреднением $\{\sigma\}$ по ячейкам размера корреляционной длины.

Равновесная конфигурация $m(r)$ определяется минимумом функционала Ландау

$\Phi(T, h, m(r))$. При температуре $T > T_c$

$\Phi(T, 0, m(r))$ инвариантен относительно преобразований $m(r)$, составляющих группу симметрий G_0 , совпадающей с группой симметрии Гамильтониана.

