Модель Изинга методом свободных фермионов.

Матрица перехода: $G=(\mathbb{Z}_N\times\mathbb{Z}_M, E)$

$$Z_{N\times M}(T)=\sum_{\{s_{ij}\}=\pm 1} e^{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(K' s_{ij} s_{i+1,j}+K s_{ij} s_{i,j+1})} =$$

Пусть $s_j=\{s_{ij}\}_{i=1}^{N}\in\{\pm 1\}^N$

$$=\sum_{\{s_j\}}\prod_{j=1}^{M}(V_1)_{s_j s_j'}(V_2)_{s_j' s_{j+1}}=\operatorname{Tr}(V_1V_2)^M$$

$$V_1, V_2 : \mathbb{C}^N\to\mathbb{C}^N$$

$$(V_1)_{ss'}=\delta_{ss'}\, e^{K'\sum_{i=1}^{N}s_i s_{i+1}} \qquad s,s'\in\{-1,1\}^N$$

$$(V_2)_{ss'}=e^{K\sum s_i s_i'}$$

Введем линейное пространство: $H=H_1\otimes\dots\otimes H_N$

$H_i\simeq\mathbb{C}^2=\operatorname{span}\{e_{+1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_{-1}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$

Пусть $A \in End(\mathbb{C}^2)$, $A_i : H \to H$

$$A_i = Id \otimes \cdots \otimes Id \otimes \underset{i}{A} \otimes Id \otimes \cdots \otimes Id, \quad A_i A_j = A_j A_i$$

Введи алгебру матриц Паули:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^i \sigma^j = i \varepsilon_{ijk} \sigma^k \quad (x, y, z) = (1, 2, 3) \quad \{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta_{ij} Id$$

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$$

Действие на базисные векторы:

$$\sigma^x_i \cdot e_{s_1} \otimes \cdots \otimes e_{s_i} \otimes \cdots e_{s_N} = e_{s_1} \otimes \cdots \otimes e_{-s_i} \otimes \cdots e_{s_N}$$

$$\sigma^z_i \cdot e_{s_1} \otimes \cdots \otimes e_{s_N} = s_i e_{s_1} \otimes \cdots \otimes e_{s_N}$$

$$V_2 = e^{K' \sum_{i=1}^{N} \sigma^z_i \sigma^z_{i+1}}$$

$$V_1 = M \otimes \cdots \otimes M$$

$$M = \begin{pmatrix} e^K & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K \end{pmatrix} = e^K Id_2 + e^{-K} \sigma^x = A e^{K^* \sigma^x} =$$

$$= A(ch K^* + \sigma^x sh K^*) = A \begin{pmatrix} ch K^* & sh K^* \\ sh K^* & ch K^* \end{pmatrix}$$

найдем A: $e^K = ch K^* \cdot A$ $\quad e^{-2K} = th K^* \Rightarrow sh 2K \cdot sh 2K^* = 1$

$e^{-K} = sh K^* \cdot A$ $\quad A = (sh K^* ch K^*)^{-1/2} = (2 sh 2K)^{1/2}$

$$M = (2\,\mathrm{sh}\,2K)^{1/2} e^{K^* \sigma^x}$$

$$V_1 = (2\,\mathrm{sh}\,2K)^{N/2} e^{K^* \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^x}$$

Переопределим $V_1 = e^{K^* \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^x}$, так что

$$Z = (2\,\mathrm{sh}\,2K)^{\frac{NM}{2}} \,\mathrm{Tr}(V_1 V_2)^M$$

Мы хотим диагонализовать $V_1 V_2$. Для этого покажем, что V_1, V_2 и их произведение образуют представление группы $O(2N)$.

1) Построим представление в H алгебры Клиффорда $Cl_{2N}(\mathbb{C})$ с образующими $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2N}$ и соотношениями $\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 2\delta_{ij}$

Фермионы, алгебра Клиффорда и преобразование Йордана-Вигнера.

Рассмотрим алгебру фермионных операторов

a_i, a_i^+, $i=1,\dots,N$, $\{a_i, a_j\}_+ = a_i a_j + a_j a_i = 0$

$\{a_i^+, a_j^+\} = 0 \qquad \{a_i^+, a_j\} = \delta_{ij}$

Построим представление этой алгебры на $H = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$. Можно отождествить базисные векторы в i-й компоненте H с состояниями $(|n_i=0\rangle, |n_i=1\rangle)$, переходящими друг в друга под действием a_i^+, a^i : $a_i^+|0\rangle = |1\rangle$, $a_i|1\rangle = |0\rangle$.

Реализуем это представление в виде матриц.

Рассмотрим алгебру $\{\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z\}_{i=1}^N$

Определим операторы $\sigma^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \sigma^- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Матрицы $\sigma_i^{\pm}$ рождают и уничтожают состояния, так же как a и a^+.

Однако в отличие от фермионных операторов матрицы σ_i в разных узлах коммутируют. Чтобы добиться, чтобы действие операторов в разном порядке отличались знаком, будем менять знак от действие операторов в тензорной компоненте с номером i в зависимости от чётности числа частиц в состоянии с меньшими номерами.

Пусть $e_1 \otimes \dots \otimes e_1$ - вакуумный вектор тогда

$$a_i \to \sigma^z_1 \otimes \dots \otimes \sigma^z_{i-1} \otimes \sigma^+_i \otimes Id \otimes \dots \otimes Id$$

$$a_i^+ \to \sigma_1^z \otimes \dots \otimes \sigma^z \otimes \sigma_i^- \otimes Id \otimes \dots \otimes Id,$$

Образующие Γ_i : $\Gamma_{2k-1} = a_k^+ + a_k$ $\quad \Gamma_{2k} = i(a_k^+ - a_k)$

Получим одну из возможных реализаций образ. Γ

$$\Gamma^*_{2k-1} = \sigma^z \otimes \dots \otimes \sigma^z \otimes \sigma^x \otimes Id \otimes \dots \otimes Id = P^*_k$$

$$\Gamma^*_{2k} = \sigma^z \otimes \dots \otimes \sigma^z \otimes \sigma^y \otimes Id \otimes \dots \otimes Id = Q^*_k$$

Другая реализация получается из предыдущей унитарным преобразованием приводящим к замене:

$$\sigma^x \longleftrightarrow \sigma^z \qquad \sigma^y = i\sigma^x\sigma^z \longrightarrow i\sigma^z\sigma^x = -\sigma^y$$

$$\Gamma_{2k-1} = \sigma^x \otimes \dots \otimes \sigma^x \otimes \underset{k}{\sigma^z} \otimes Id \otimes \dots \otimes Id = P_k$$

$$\Gamma_{2k} = -\sigma^x \otimes \dots \otimes \sigma^x \otimes \underset{k}{\sigma^y} \otimes Id \otimes \dots \otimes Id = Q_k$$

Матрица преобразования: $g = 2^{-\frac{N}{2}}(\sigma^x + \sigma^z)^{\otimes N} = g^{-1}$

$$\frac{1}{2}(\sigma^x + \sigma^z)^2 = \frac{1}{2}\left((\sigma^x)^2 + (\sigma^z)^2 + \{\sigma^x, \sigma^z\}\right) = Id$$

$$\frac{1}{2}(\sigma^x + \sigma^z)\sigma^x(\sigma^x + \sigma^z) = \frac{1}{2}\left((\sigma^x)^2 + \sigma^z\sigma^x\right)(\sigma^x + \sigma^z) = \frac{1}{2}(Id + i\sigma^y)(\sigma^x + \sigma^z) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma^x + \sigma^z + i\sigma^y\sigma^x + i\sigma^y\sigma^z) = \frac{1}{2}(\sigma^x + \sigma^z + \sigma^z - \sigma^x) = \sigma^z$$

$$\frac{1}{2}(\sigma^x + \sigma^z)\sigma^z(\sigma^x + \sigma^z) = \frac{1}{2}(\sigma^x\sigma^z + Id)(\sigma^x + \sigma^z) = \frac{1}{2}(\sigma^x\sigma^z\sigma^x + \sigma^x + \sigma^x + \sigma^z) = \sigma^x$$

$$\frac{1}{2}(\sigma^x + \sigma^z)\sigma^y(\sigma^x + \sigma^z) = -\frac{1}{2}(\sigma^x + \sigma^z)^2\sigma^y = -\sigma^y$$

Любые операторы из $End(H)$ можно разложить по 2^N произв. базисных матриц: $1, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{2N}, \Gamma_1\Gamma_2, \dots, \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 \dots$

Т.к. ($Cl_{2N}(\mathbb{C})$ – простая центральная алгебра, она изоморфна матричной алгебре Mat_{2^N}.

В частности $\sigma^x_k = -iP_kQ_k \Rightarrow V_1 = e^{-iK\sum_{k=1}^{N} P_kQ_k}$

$$\sigma^z_k = \sigma^x_1 \dots \sigma^x_{k-1} P_k \Rightarrow \sigma^z_{k+1}\sigma^z_k = iP_{k+1}Q_k$$

$$\sigma^z_1\sigma^z_N = -iP_1Q_N U; \quad U = (\sigma^x)^{\otimes N} = \sigma^x \otimes \dots \otimes \sigma^x$$

Получим $V_2 = \prod_{i=1}^{n-1} e^{iK' P_{k+1} Q_k} e^{-iK' P_1 Q_N U}$

Хотим диагонализовать матрицы V_1, V_2:

$$g V_1 g^{-1} = e^{-iK^* \sum_{k=1}^{N} P_k^* Q_k^*} \text{ — диагональная.}$$

Для диагонализации мы воспользуемся тем фактом, что с точностью до наличия оператора U матрицы V_1, V_2 живут в алгебре Клиффорда, которая, в свою очередь, реализует представление ортогональной группы $O(2N)$.

Для этого заметим

<u>Теорема.</u>

Если есть два набора матриц $\{\Gamma_k\}$ и $\{\Gamma_k^*\}$, то $\exists$ преобразование S, т. ч. $\Gamma_k^* = S \Gamma_k S^{-1}$.

Теперь рассмотрим линейные комбинации матриц $\{\Gamma_k\}$, сохраняющие соотношения:

$$\Gamma_k^* = \sum O_{jk} \Gamma_j$$

$$2\delta_{kk'} = \{\Gamma_k^*, \Gamma_{k'}^*\} = \sum O_{jk} O_{j'k'} \{\Gamma_j, \Gamma_{j'}\} = 2\sum O_{jk} O_{jk'} \Rightarrow$$

$O \in O(2N)$ и $\exists$ преобразование $S(O)$: $\Gamma_k^* = S(O) \Gamma_k S^{-1}(O)$.

Очевидно $S(O) S(O') = S(OO')$, т. е. $S(O)$ реализует представление $O(2N)$ в $H = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N} \simeq \mathbb{C}^{2^N}$

Как связаны O и $S(O)$?

Матрицы поворотов из $O(2N)$ можно реализовать, как произведение поворотов в плоскостях натянутых на пару Γ_k, Γ_e

Пусть K - поворот в плоскости $\Gamma_k - \Gamma_l$:

$$K: \Gamma_k \to \cos\theta \cdot \Gamma_k - \sin\theta\, \Gamma_e \equiv \Gamma_k^*$$

$$\Gamma_e \to \sin\theta\, \Gamma_k + \cos\theta\, \Gamma_e = \Gamma_e^*$$

$$\Gamma_i \to \Gamma_i \qquad i \neq k, e$$

$$\boxed{\begin{gathered}(\Gamma_k \Gamma_e)^2 = \Gamma_k \Gamma_e \Gamma_k \Gamma_e = -\Gamma_k^2 \Gamma_e^2 = -1 \\ (\Gamma_k \Gamma_e)^{2n} = (-1)^n \quad (\Gamma_k \Gamma_e)^{2n+1} = (-1)^n \Gamma_k \Gamma_e\end{gathered}}$$

$$S(K) = e^{\frac{\theta}{2} \Gamma_k \Gamma_e} = \cos\frac{\theta}{2} + \Gamma_k \Gamma_e \sin\frac{\theta}{2}$$

$$S^{-1}(K) = \cos\frac{\theta}{2} - \Gamma_k \Gamma_e \sin\frac{\theta}{2}$$

$$S(K)\, \Gamma_k\, S^{-1}(K) = \left(\cos\frac{\theta}{2} + \Gamma_k \Gamma_e \sin\frac{\theta}{2}\right) \Gamma_k \left(\cos\frac{\theta}{2} - \Gamma_k \Gamma_e \sin\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \Gamma_k - 2\cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2}\, \Gamma_e = \cos\theta\, \Gamma_k - \sin\theta\, \Gamma_e.$$

Пример: $\Gamma_k = P_k^*$, $\Gamma_e = Q_k^*$

$$S(K) = e^{\frac{\theta}{2} P_k^* Q_k^*} = e^{\frac{i\theta}{2} \sigma_k^z} = Id \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} e^{\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes Id$$

Собств. значения матрицы K $e^{\pm i\theta}$ и $1^{(2n-2)}$

Собств. значения $S(K)$: $\left(e^{\pm i\frac{\theta}{2}}\right)^{(2^{n-1})}$.

Пусть K - последовательность n коммутир. поворотов K_i в плоскостях $\Gamma_{\pi_{2i-1}} - \Gamma_{\pi_{2i}}$ на угол θ_i $i=1,\dots,N$, $\pi \in S_{2N}$,

собственные значения матрицы $K = \prod_{i=1}^{N} K_i$

есть $e^{\pm i\theta_1}, \dots, e^{\pm i\theta_i}$, а собств.

значение $S(K) = \prod_{i=1}^{N} e^{i\frac{\theta_i}{2}\Gamma_{\pi_{2i-1}}\Gamma_{\pi_{2i}}}$ есть

$\lambda = e^{\frac{i}{2}(\pm\theta_1 \pm \theta_2 \dots \pm \theta_N)}$.

В частности собств значения $V_1 = e^{\sum_k -iK^* P_k Q_k}$

есть $\lambda = e^{\pm K^* \pm K^* \dots \pm K^*}$

$(P_1 Q_N)^2 U^2 =$

Вернемся к $V = V_1 V_2$:

$$V_1 = e^{-iK^* \sum_{k=1}^{N} P_k Q_k}$$

$$V_2 = \prod_{i=1}^{n-1} e^{iK' P_{k+1} Q_k} e^{-iK' P_1 Q_N U}$$

$$U = \sigma_1^x \dots \sigma_N^x$$

1) $U^2 = 1$ 2) $\left(\frac{1 \pm U}{2}\right)^2 = \frac{1 \pm U}{2}$

3) $(1+U)(1-U) = 0$ 4) $U P_i Q_j = P_i Q_j U$ $\forall i,j$

$\frac{1 \pm U}{2}$ - ортогональные проекторы, разбивающие H на два подпространства.

Заметим, что $e^{-iK' P_1 Q_N U} = ch(-iK' P_1 Q_N) + U sh(-iK' P_1 Q_N)$

$= e^{-iK' P_1 Q_N} \frac{1+U}{2} + e^{iK' P_1 Q_N} \frac{1-U}{2}$

$$V_1 V_2 = \frac{1+u}{2}\left(\prod_{i=1}^{N-1} e^{iK' P_{i+1} Q_i}\, e^{-iK' P_1 Q_N} \prod_{k=1}^{N} e^{-iK^* P_k Q_k}\right) +$$

$$+ \frac{(1-u)}{2}\left(\prod_{i=1}^{N} e^{iK' P_{i+1} Q_i} \prod_{k=1}^{N} e^{-iK^* P_k Q_k}\right) =$$

$$= \frac{1+u}{2} V_+ + \frac{1-u}{2} V_- .$$

$V_+ = S(R_+)$ $V_- = (R_-)$ матрицы, соответств. поворотам. Нужно найти их собств. значение и взять половину из соответствующего подпространства.

Займемся V_-. Будем диагонализовывать $V_-^0 = V_1^{1/2} V_- V^{-1/2}$ с тем же спектром

$$V_-^0 = \prod_{k=1}^{N} e^{-\frac{i}{2} K^* P_k Q_k} \prod_{k=1}^{N} e^{iK' P_{i+1} Q_i} \prod_{k=1}^{N} e^{-\frac{i}{2} K^* P_k Q_k}$$

$$= S(R_1)\, S(R_-)\, S(R_1) = S(R_-^0)$$

$$R_1 = \mathrm{diag}\left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{ch} K^* & i\,\mathrm{sh} K^* \\ -i\,\mathrm{sh} K^* & \mathrm{ch} K^* \end{pmatrix}_k \right\}_{k=1,\dots,N}$$

$$R_- = \begin{pmatrix} \mathrm{ch} 2K' & & & & -i\,\mathrm{sh} 2K' \\ & \mathrm{ch} 2K' & i\,\mathrm{sh} 2K' & & \\ & -i\,\mathrm{sh} 2K' & \mathrm{ch} 2K' & & \\ & & & \ddots & \\ i\,\mathrm{sh} 2K' & & & & \mathrm{ch} 2K' \end{pmatrix}$$

$$R^0_- = R_c R_- R_1 = \begin{pmatrix} a & b & & b^+ \\ b^+ & a & & \\ & & \ddots & b \\ b & & b^+ & a \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 2k' \operatorname{ch} 2k^* & i \operatorname{ch} 2k' \operatorname{sh} 2k^* \\ -i \operatorname{ch} 2k' \operatorname{sh} 2k^* & \operatorname{ch} 2k' \cdot \operatorname{ch} 2k^* \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2k' \operatorname{sh} 2k & -i \operatorname{sh} 2k' \operatorname{sh}^2 k^* \\ i \operatorname{sh} 2k \operatorname{ch}^2 k & -\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2k' \operatorname{sh} 2k^* \end{pmatrix}$$

R_- и R_1 коммутируют со сдвигом.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & Id_2 & & \\ & & Id_2 & \\ Id_2 & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

собств. вектора имеют вид $\psi_k = (v, \varepsilon_k v, \dots, \varepsilon_k^{N-1} v)$

где $\varepsilon_k^N = 1$, т.е. $\varepsilon_k = e^{\frac{2\pi i k}{N}}$, а собств значение

есть собств. значение матриц

$$\alpha_{2k} = a + \varepsilon_k b + \varepsilon_k^{N-1} b^+. \quad 0 \le k \le n-1$$

т.к. $\det \alpha_{2k} = 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = e^{\pm \gamma_{2k}}$ и

$$\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\alpha_{2k}) = \operatorname{ch} \gamma_{2k} = \operatorname{ch} 2k^* \operatorname{ch} 2k' - \operatorname{sh} 2k^* \cdot \operatorname{sh} 2k' \cos\left(\frac{2k\pi}{N}\right)$$

Тогда собств значение $V(R_-)$ есть

$$e\left[\frac{1}{2}\left(\pm\gamma_0 \pm \gamma_2 \dots \pm \gamma_{2n-2}\right)\right]$$

Отличие V_+ в том что она коммутирует со сдвигом с антипериодическими гран. условиями:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & Id_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Id_2 \\ -Id_2 & & & 0 \end{pmatrix}$$

откуда

$$\operatorname{ch}\gamma_{2k+1} = \operatorname{ch}2K^{*}\operatorname{ch}2K' - \operatorname{sh}2K^{*}\cdot\operatorname{sh}2K'\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{N}\right)$$

и собств значение V_+ есть

$$e^{\frac{1}{2}(\pm\gamma_1 \pm\gamma_3 \dots \pm\gamma_{2N-1})}.$$

Проекторы $\frac{U\pm1}{2}$ вырезают из спектра $V_\pm$ половину. Это вырезание обеспечивается условием чётности числа минусов в сумме.

В итоге имеем

$$Z = (2\operatorname{sh}2K)^{\frac{MN}{2}}\sum_{i=1}^{2^N}\lambda_i^M = (2\operatorname{sh}2K)^{\frac{MN}{2}}\Big[\sum \exp\Big(\frac{M}{2}(\pm\gamma_0 \dots \pm\gamma_{2N})\Big)$$

$$+\sum \exp\Big(\frac{M}{2}(\pm\gamma_1 \pm \dots \pm\gamma_{2N-1})\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}(2\operatorname{sh}2K)^{MN/2}\Big\{\prod_{l=1}^{N} 2\operatorname{ch}\frac{M\gamma_{2l}}{2} + \prod_{l=1}^{N}\Big(2\operatorname{sh}\frac{M\gamma_{2l}}{2}\Big) +$$

$$+\prod_{l=1}^{N}\Big(2\operatorname{ch}\frac{M\gamma_{2l-1}}{2}\Big) + \prod_{l=1}^{N}\Big(2\operatorname{sh}\Big(\frac{M\gamma_{2l-1}}{2}\Big)\Big)\Big\}.$$