Группа кос, квантовые группы и приложения

Листок 6. Представления алгебры уравнения отражений

Рекомендуемый срок сдачи: **22 мая 2025**

1. Рассмотрим алгебру уравнения отражений, порожденную N^2 генераторами L_i^j, $1 \le i, j \le N$, удовлетворяющими квадратичным соотношениям

$$R_1 L_1 R_1 L_1 = L_1 R_1 L_1 R_1, \qquad L = \|L_i^j\| \tag{1}$$

с R-матрицей $GL(N)$ типа. Перейдем к новым генераторам K_i^j с помощью линейного сдвига:

$$L = I e_{\mathcal{L}} - (q - q^{-1})K, \qquad K = \|K_i^j\|,$$

где $e_{\mathcal{L}}$ — единичный элемент алгебры уравнения отражений.

а) Зафиксируем базис $\{x_i\}_{1 \le i \le N}$ в N-мерном комплексном векторном пространстве V и определим представление алгебры уравнения отражений в пространстве V, задав линейное действие ее генераторов следующим образом:

$$L_1 R_1 \triangleright x_{|1\rangle} = R_1^{-1} x_{|1\rangle}.$$

Здесь символ $x_{|1\rangle}$ обозначает столбец базисных векторов пространства V: $x_{|1\rangle} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$.

Найдите явный вид действия следующего полинома m-го порядка от генераторов K:

$$K_{\underline{m+1}} K_{\underline{m}} \dots K_{\underline{3}} K_{\underline{2}} \triangleright x_{|1\rangle} = ?,$$

где $K_{\underline{1}} = K_1$, $K_{\underline{p}} = R_{p-1}^{-1} K_{\underline{p-1}} R_{p-1}$ для всех $p \ge 2$.

б) Пользуясь тождеством

$$\mathrm{Tr}_{R(2\dots m+1)}(R_2 \dots R_m K_{\underline{m+1}} \dots K_{\underline{2}}) = I_1 \mathrm{Tr}_R(K^m),$$

проверьте, что центральные элементы $p_m(K) = \mathrm{Tr}_R(K^m)$ представляются в пространстве V скалярными операторами

$$p_m(K\triangleright) = \chi_m \, \mathrm{Id}_V,$$

и найдите коэффициенты χ_m.

2. Определим "обобщенное правило Лейбница" для перестановки генераторов L_i^j и базисных векторов x_i пространства V (см. предыдущую задачу):

$$R_1 L_1 R_1 x_{|1\rangle} = x_{|1\rangle} L_2. \tag{2}$$

а) Проверьте, что приведенное выше правило Лейбница, дополненное действием генераторов на единичный элемент

$$L_i^j \triangleright e_{\mathcal{L}} = \varepsilon(L_i^j) e_{\mathcal{L}} = \delta_i^j e_{\mathcal{L}}, \tag{3}$$

позволяет определить представление алгебры уравнения отражений (1) в тензорных степенях $V^{\otimes k}$, $\forall\, k \ge 1$ и найдите явный вид действия генераторов L_i^j в тензорном базисе $R_1 R_2 \dots R_k \, x_{|1\rangle} x_{|2\rangle} \dots x_{|k\rangle}$ пространства $V^{\otimes k}$ (мы опускаем знаки тензорного произведения $\otimes$ в обозначении базисного вектора в $V^{\otimes k}$):

$$L_1 \triangleright R_1 R_2 \dots R_k \, x_{|1\rangle} x_{|2\rangle} \dots x_{|k\rangle} = ?$$

б)* Пользуясь результатом предыдущего пункта задачи, найдите явный вид матрицы $\Omega^{(k)}(R)$, определяющей действие центрального элемента $p_1(L) = \mathrm{Tr}_R(L)$ в пространстве $V^{\otimes k}$:

$$\mathrm{Tr}_R(L) \triangleright x_{|1\rangle} x_{|2\rangle} \dots x_{|k\rangle} = \Omega^{(k)}(R)_{12\dots k}\, x_{|1\rangle} x_{|2\rangle} \dots x_{|k\rangle}.$$

Указание. Действие генераторов в пространстве $V^{\otimes k}$ удобно переписать в виде действия "матричной копии" $L_{\underline{k+1}}$ на стандартный тензорный базис $x_{|1\rangle} x_{|2\rangle} \dots x_{|k\rangle}$ и воспользоваться тождеством:

$$\mathrm{Tr}_{R(m+1)}(L_{\underline{m+1}}) = I_{12\dots m} \mathrm{Tr}_R(L).$$

3. Пространство $V^{\otimes k}$ разлагается в прямую сумму

$$V^{\otimes k} = \bigoplus_{\lambda \vdash k} \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} V^\lambda_{(i)}$$

где $V^\lambda_{(i)} = P^\lambda_{ii}(R) V^{\otimes k}$ — образы действия примитивных идемпотентов $P^\lambda_{ii}(R)$ алгебры Гекке $H_k(q)$ в ее R-матричном представлении. Здесь индекс i нумерует стандартные таблицы Юнга, отвечающие данному разбиению $\lambda \vdash k$, d_λ — количество таких таблиц. Докажите, что центральный элемент $p_1(L) = \mathrm{Tr}_R(L)$ в пространствах $V^\lambda_{(i)}$ представляется скалярными операторами:

$$\mathrm{Tr}_R(L \triangleright) = \chi_\lambda \, \mathrm{Id}_{V^\lambda_{(i)}},$$

где коэффициенты χ_λ зависят только от разбиения λ и не зависят от номера таблицы Юнга i, и найдите явный вид этих коэффициентов.

4. Рассмотрим пространство V^*, двойственное к N-мерному пространству V, введенному в задачах 1 и 2. Пусть $\{y^i\}_{1\le i\le N}$ — базис пространства V^*, двойственный базису $\{x_i\}_{1\le i\le N}$

$$\langle x_i, y^j \rangle = \delta_i^j$$

относительно невырожденной билинейной формы $\langle\, , \rangle : V \otimes V^* \to \mathbb{C}$. Определим "обобщенное правило Лейбница" для перестановки генераторов L_i^j с векторами y^k:

$$L_2\, y^{\langle 1|} = y^{\langle 1|} R_1 L_1 R_1. \tag{4}$$

Здесь символ $y^{\langle 1|}$ обозначает строку базисных векторов пространства V^*: $y^{\langle 1|} = (y^1, y^2, \dots, y^N)$.

а) Докажите, что перестановка (4) вместе с действием (3) задает представление алгебры уравнения отражений в пространстве V^*.

б) Постройте представление алгебры уравнения отражений в пространстве $V \otimes V^*$, вычислив действие генераторов на базисных векторах $x_i \otimes y^j$ с помощью "обобщенных правил Лейбница" (2) и (4).

в) Пользуясь результаом предыдущего пункта, найдите "обобщенное правило Лейбница" для перестановки генераторов L_i^j с базисными элементами $M_k^s = x_k \otimes y^s$, которое позволит строить представления алгебры уравнения отражений в тензорных степенях $W^{\otimes n}$ пространства $W = V \otimes V^*$.