

ФИНАЛЬНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ

Для получения максимальной оценки не нужно решать все задачи. Формула оценки такова:

$$\min\{10, \frac{1}{6} \cdot (\text{сумма набранных баллов})\}.$$

Решения принимаются не позднее 21 мая 23:59 по московскому времени. Решения присылаются на почту votedvedev@hse.ru. Допускается пользоваться различными источниками (книги, статьи). В этом случае укажите ссылку на источник (ссылки на интернет-форумы не принимаются). Оформление работы свободное: письменно (аккуратно, чтобы было читаемо) и сделать фотографии, использование *LaTeX*. Решения задач строго индивидуальные!

1. (5 баллов) Пусть (M^n, g) – асимптотически плоское многообразие с одним концом, $n > 2$. Пусть u – гладкая положительная функция такая, что в асимптотически плоской координатной карте она имеет вид:

$$u(x) = a + b|x|^{2-n} + O_2(|x|^{2-n-\gamma})$$

для некоторого $\gamma > 0$ и некоторых констант $a > 0, b$ при $|x| \rightarrow +\infty$. Докажите, что метрика $\tilde{g} := u^{\frac{4}{n-2}}g$ также асимптотически плоская на M и

$$m_{ADM}(\tilde{g}) = a^2 m_{ADM}(g) + 2ab.$$

2. (5 баллов) Докажите, что для асимптотически плоской сферически симметричной метрики $g = \frac{dr^2}{V(r)} + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ её масса равна

$$m_{ADM}(g) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} r^{n-2} (1 - V(r)).$$

3. (10 баллов) Изучите «доказательство» теоремы 3.14 в книге D.Lee. Geometric Relativity и дайте её строгое доказательство. Эта теорема утверждает, что АДМ-массу конца M_k асимптотически плоского многообразия (M^n, g) можно вычислить как

$$m_{ADM}(M_k, g) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{-1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \int_{\Sigma_i} G(X, \nu_\delta) ds_\delta,$$

где G – тензор Эйнштейна, X – поле $x^j \partial_j$ на M_k в асимптотически плоской карте конца, $(\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ – всякая исчерпывающая M_k последовательность в том смысле, что множества $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ с $\partial\Omega_i = \Sigma_i$ исчерпывают M_k и $|\Sigma_i| \leq C \left(\inf_{x \in \Sigma_i} |x| \right)^{n-1}$, где константа $C > 0$ не зависит от i .

4. (10 балла) Докажите, что равенство в неравенстве Уиллмора достигается тогда и только тогда, когда Σ – круглая сфера.

5. (5+5 баллов) а) Рассмотрим лоренцевские бусты: $x\partial_t + t\partial_x$ относительно псевдодекартовой системы координат на пространстве Минковского. Убедитесь, что эти поля киллинговы и найдите их киллинговы горизонты.

б) Пространство-время Керра представляет собой топологически $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ с координатами $(t, r, \vartheta, \varphi)$, где $t \in \mathbb{R}$, радиус $r > 0$ достаточно большой, широта $0 \leq \vartheta \leq \pi$ и долгота $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

(сферические координаты на $\mathbb{R}^3$). Введём обозначения

$$\begin{aligned} S &:= \sin \vartheta \\ C &:= \cos \vartheta \\ \rho^2 &:= r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta \\ \Delta &:= r^2 - 2Mr + a^2 \\ \mathcal{A} &:= (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \vartheta. \end{aligned}$$

Тогда метрика Керра на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ записывается так

$$-\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\vartheta^2 - \frac{4Mr a S^2}{\rho^2} dt d\varphi + \frac{\mathcal{A}}{\rho^2} S^2 d\varphi^2,$$

где $M^2 \geq a^2$. Пространство-время Керра не является статическим. Это более общий случай *стационарного пространства-времени*. Докажите, что поле ∂_t является киллинговым и найдите его киллингов горизонт. Он называется *эргосферой*.

7 (5 баллов). Пусть (M, g, V) – статическое многообразие и $\Sigma = V^{-1}(0)$. Как мы знаем из листка 1, Σ вполне геодезично в (M, g) . Пусть ν – внешнее единичное нормальное векторное поле вдоль Σ . Докажите, что $\nu(V) = |\nabla^g V|_g = \text{const}$ на Σ . Эта постоянная называется *поверхностной гравитацией*.

8 (5 баллов). Покажите, что край статического многообразия с краем, являющегося также асимптотически шварцшильдовской системой, является квазилокальной фотонной поверхностью.

9 (5+5+5 баллов). Пусть (M, g, V) – статическое многообразие с краем, являющееся асимптотически шварцшильдовской системой. Пусть P – эквипотенциальная фотонная поверхность в $(\mathbb{R} \times M, -V^2 dt^2 + g)$. Докажите, что

- а) пересечение $P \cap M$ вполне омбилично в M ;
- б) средняя кривизна H пересечения $P \cap M$ постоянна;
- в) если $(\mathbb{R} \times M, -V^2 dt^2 + g)$ удовлетворяет изотропному условию энергодоминантности, то дополнительно к б) $H > 0$.

Указание: Используйте сокращенное уравнение Гаусса.

10 (5 баллов). Докажите, что гиперповерхность $r = \left(\frac{nm}{2}\right)^{\frac{1}{n-2}}$ в $(n+1)$ -мерном пространстве-времени Шварцшильда является (эквипотенциальной) фотонной поверхностью (фотонная сфера).

11 (5 баллов). Рассмотрим 4-мерное пространство Минковского. Пусть S – гиперповерхность заданная как:

$$-t^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2, \quad a > 0.$$

Докажите, что это (эквипотенциальная) фотонная поверхность.

Указание: Однополостный гиперболоид – линейчатая поверхность. Если прямая лежит на поверхности, то она там геодезическая (почему?).