

Листок 8
ФОТОННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

1. Пусть (M, g, V) – статическое многообразие и $\Sigma = V^{-1}(0)$. Как мы знаем из листка 1, Σ вполне геодезично в (M, g) . Пусть ν – внешнее единичное нормальное векторное поле вдоль Σ . Докажите, что $\nu(V) = |\nabla^g V|_g = \text{const}$ на Σ . Эта постоянная называется *поверхностной гравитацией*.

2. Проверьте, что фотонная поверхность является квазилокальной фотонной поверхностью.

3. Покажите, что край статического многообразия с краем, являющегося также асимптотически шварцшильдовской системой, является квазилокальной фотонной поверхностью.

4. Пусть (M, g, V) – статическое многообразие с краем, являющееся асимптотически шварцшильдовской системой. Пусть P – эквипотенциальная фотонная поверхность в $(\mathbb{R} \times M, -V^2 dt^2 + g)$. Докажите, что

а) пересечение $P \cap M$ вполне омбилично в M ;

б) средняя кривизна H пересечения $P \cap M$ постоянна;

в) если $(\mathbb{R} \times M, -V^2 dt^2 + g)$ удовлетворяет изотропному условию энергодоминантности, то дополнительно к б) $H > 0$.

Указание: Используйте сокращенное уравнение Гаусса.

5. Докажите, что гиперповерхность $r = \left(\frac{nm}{2}\right)^{\frac{1}{n-2}}$ в $(n+1)$ -мерном пространстве-времени Шварцшильда является (эквипотенциальной) фотонной сферой.

6. Рассмотрим 4-мерное пространство Минковского. Пусть S – гиперповерхность заданная как:

$$-t^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2, \quad a > 0.$$

Докажите, что это (эквипотенциальная) фотонная поверхность.

Указание: Однополостный гиперболоид – линейчатая поверхность. Если прямая лежит на поверхности, то она там геодезическая (почему?).