Семинар 28

Элементарная проективная геометрия в присутствии невырожденной квадрики 2

1. Найти уравнение квадрики, если она содержит точки $(1,0,0)$, $(1,0,-1)$, $(2,1,0)$ и касается прямых $X_2+X_3=0$ и $X_1+X_3=0$.

2. Рассмотрим на проективной плоскости четыре различные точки, лежащие на невырожденной квадрике. Шесть прямых, определяемых этими точками, пересекаются в семи точках, четыре из которых совпадают с данными. Докажите, что три оставшиеся точки служат вершинами автополярного треугольника.

3. Доказать, что непустая невырожденная квадрика в $\mathbb{R}P^2$ проективно эквивалентна квадрике $XY=Z^2$.

4. Пусть A – точка, лежащая на невырожденной квадрике, а B – полюс любой прямой, проходящей через точку A. Доказать, что прямая AB – это касательная к квадрике в точке A.

5. На проективной плоскости даны невырожденная квадрика и точка A, не лежащая на квадрике. Прямая, проходящая через точку A, пересекает квадрику в точках X,Y, а поляру точки A – в точке B. Доказать, что двойное отношение $[A,X,B,Y]=-1$.

6. На невырожденной квадрике в P^2 отмечены две тройки различных точек A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3. Доказать, что существует единственный проективный автоморфизм квадрики, который переводит точку A_i в точку B_i, $i=1,2,3$.

7. Доказать, что двойное отношение точек на квадрике в P^2 не меняется при ее проективном автоморфизме.

8. Во всяком треугольнике, описанном около невырожденной квадрики в P^2, прямые, соединяющие его вершины с точками касания противоположных сторон, пересекаются в одной точке. Доказать.

9*. Касание прямой $A_1X_1+A_2X_2+A_3X_3=0$ и невырожденной квадрики, заданной симметричной билинейной формой с матрицей Грама $B=(b_{i,j})$, равносильно обнулению некоторого симметричного определителя четвертого порядка. Какого?

10*. Назовем Тройкой три попарно непересекающихся прямых в P^3. Доказать, что любые две Тройки проективно эквивалентны.

11**. Назовем любую прямую, пересекающую все прямые Тройки, ее трансверсалью. Рассмотрим две Тройки: $L=(l_1,l_2,l_3)$ и $M=(m_1,m_2,m_3)$. Известно, что пересечение $l_i \cap m_j$ не пусто для любых $1 \le i,j \le 3$. Доказать, что любая трансверсаль Тройки L пересекает любую трансверсаль Тройки M.