Семинар 14

Геометрия нормкубики $v_{1,3}(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$.

Задача 1. [Особые квадрики, проходящие через нормкубику.]

(1) Пусть квадрика $Q \in \mathbb{P}(M)$ особа. Докажите, что Q является конусом (т.е. $\operatorname{Sing} Q$ нульмерно), причем вершина конуса не может лежать вне X.

(2) Покажите, что любая точка на X является вершиной какой-нибудь особой квадрики из $\mathbb{P}(M)$.

(3) Покажите, что множество особых квадрик в $S \subset \mathbb{P}(M)$ задается уравнением 4 степени, которое является полным квадратом, так что S является неприводимой коникой на плоскости $\mathbb{P}(M)$.

Задача 2. [Через любую точку вне нормкубики проходит ее единственная хорда или касательная.] Пусть $A \in \mathbb{P}^3$ — произвольная точка вне X, обозначим через l_A прямую на плоскости $\mathbb{P}(M)$, состоящую из квадрик, проходящих через точку A.

(1) Покажите,что если прямая l_A пересекает конику S в двух точках Q_1 Q_2, то A лежит на хорде нормкубики, а именно на прямой, проходящей через точки $\operatorname{Sing} Q_1$ и $\operatorname{Sing} Q_2$.

(2) Покажите, что если прямая l_A касается коники S в точке Q, то A лежит на касательной прямой к нормкубике, проходящей через точку $\operatorname{Sing} Q$.

Задача 3. [Двойственная нормкубика в двойственном $\check{\mathbb{P}}^3$ и дискриминантная поверхность.] Напомним (см. задачу 1 к семинару 13), что плоскости в $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(W^*)$ – это (с точностью до пропорциональности) кубические формы на V.

(1) Покажите, что множество кубических форм $F \in W$, являющихся кубом некоторой линейной формы ($F = L^3$), образует в $\check{\mathbb{P}}^3$ кривую, изоморфную нормкубике X. Мы будем обозначать ее через $\check{X}$. Таким образом, $\check{X}$ состоит из плоскостей, пересекающих X в одной точке (трехкратно). Такие плоскости называются *соприкасающимися* к нормкубике X.

(2) Дискриминантной поверхностью $D \subset \mathbb{P}^3$ называется геометрическое место точек, лежащих на касательных прямых к X. Покажите, что множество кубических форм $F \in W$, имеющих кратный корень(т.е. $F = L_1^2 L_2$, где L_1 и L_2 линейные формы), является дискриминантной поверхностью для двойственной нормкубики $\check{X}$. Обозначим множество таких форм через $\check{D} \subset \check{\mathbb{P}}^3$.

Задача 4. [Дискриминантная поверхность является особой квартикой.] Пусть $l \subset \mathbb{P}^3$ — прямая, причем $\check{l} \cap \check{X} = \varnothing$. (Напомним, $\check{l}$ это пучок плоскостей, проходящих через l; такую прямую всегда можно выбрать.) Рассмотрим проектирование $\pi_l : \mathbb{P}^3 \setminus l \to l'$ (l' — какая-нибудь другая прямая $l' \subset \mathbb{P}^3$, не пересекающаяся с l) и ограничение π_l на X.

(1) Покажите, что композиция $f = \pi_l \circ v_{1,3} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ является трехлистным накрытием, т.е. для точки $A \in l'$ прообраз $f^{-1}(A)$ состоит из трех точек, если плоскость $< l, A > \notin \check{D}$ и прообраз $f^{-1}(A)$ состоит из двух точек, если плоскость $< l, A > \in \check{D}$ — в последнем случае такая точка называется точкой простого ветвления отображения f. Тем самым число точек простого ветвления отображения f есть число точек пересечения прямой $\check{l}$ с $\check{D}$, т.е. степень поверхности $\check{D}$.

(2) Покажите, что если трехлистное отображение $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ имеет только простые точки ветвления, то таких точек ровно 4.

(3) Покажите, что $X = \operatorname{Sing} D$.

Отображение Веронезе $v_{2,2} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$.

Пусть V – это 3-мерное векторное пространство с базисом e_0, e_1, e_2 и координатами x_0, x_1, x_2, а $W = S^2V^*$ — 6-мерное пространство квадратичных форм от переменных x_0, x_1, x_2, и отображение $v_{2,2} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W^*)$ сопоставляет каждому вектору $v \in V$ линейную форму на W, значение которой на форме $F \in W$ есть $F(v)$. Образ этого отображения $X = v_{2,2}(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ называется *поверхностью Веронезе.*

Задача 5. [Сечения поверхности X гиперплоскостями — это нули квадратичных форм.] Покажите, что имеется биекция между гиперплоскостями в $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(W^*)$ и квадратичными формами (с точностью до ненулевого сомножителя) из W, при котором пересечение поверхности X с гиперплоскостью, соответствующей форме F, это в точности образ (при отображении $v_{2,2}$) коники, задаваемой на плоскости формой F. Выведите из этого, что

(1) X не содержится ни в какой гиперплоскости и даже ни в каком проективном подпространстве $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^5$;

(2) X — это поверхность степени 4.

Задача 6. [Координатное задание отображения Веронезе.]

(1) В координатах квадратичная форма $F \in W$ задается формулой $F(x) = \sum a_{ij}x_ix_j$, то есть симметрической 3×3-матрицей $A = (a_{ij})$, обозначим двойственные координаты в пространстве W^* через z_{ij}. Покажите, что тогда отображение Веронезе $v_{2,2}$ задается формулами $z_{ij} = x_ix_j$.

(2) Покажите, что отображение Веронезе $v_{2,2}$ инъективно.

(3) Покажите, что X содержится в пересечении квадрик в $\mathbb{P}^5$, задаваемых уравнениями $z_{ij}z_{pq} = z_{iq}z_{pj}$, где $i, j, p, q \in \{0, 1, 2\}$.

(4) Покажите, что X совпадает с пересечением квадрик из предыдущего пункта. [Пусть $Y \subset \mathbb{P}^5$ — пересечение квадрик $z_{ij}z_{pq} = z_{iq}z_{pj}$, и пусть $\mathbb{A}_{i,j} \subset \mathbb{P}^5$ — аффинная карта, задаваемая условием $z_{ij} \neq 0$. Придумайте отображения $\psi_{ij} : Y \cap \mathbb{A}_{ij} \to \mathbb{P}^2$, такие что $v_{2,2} \circ \psi_{ij} = \mathrm{Id}_{Y\cap\mathbb{A}_{ij}}$.]

Задача 7. [Двойственная поверхность Веронезе в двойственном пространстве $\check{\mathbb{P}}^5$.] Напомним (см. задачу 5), что гиперплоскости в $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(W^*)$ – это (с точностью до пропорциональности) квадратичные формы на V. Покажите, что множество квадратичных форм $F \in W$, являющихся квадратом некоторой линейной формы ($F = L^2$), образует в $\check{\mathbb{P}}^5$ поверхность, изоморфную поверхности Веронезе X. Мы будем обозначать ее через $\check{X}$. Таким образом, $\check{X}$ состоит из гиперплоскостей в $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(W^*)$, пересекающих X по прямой (двукратно).