

*А. К. Погребков*

# Теория солитонов

Высшая школа экономики  
2-й семестр 2024/2025 гг.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция</b>	<b>3</b>
1.1	О лошадях . . . . .	3
1.1.1	Первое наблюдение “волны переноса” . . . . .	3
1.1.2	Уравнение Кортевега–де Фриза – баланс дисперсии и нелинейности . . . . .	4
1.1.3	Развитие теории нелинейных уравнений . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Лекция</b>	<b>8</b>
2.1	Многомерные уравнения. . . . .	8
2.2	Общая схема метода обратной задачи . . . . .	8
2.3	Решения Йоста . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Лекция</b>	<b>13</b>
3.1	Решения Йоста (окончание) . . . . .	13
3.2	Асимптотическое поведение решений Йоста по $k$ . . . . .	14
3.3	Матрица монодромии . . . . .	14
3.4	Свойства элементов матрицы монодромии. . . . .	17
<b>4</b>	<b>Лекция</b>	<b>19</b>
4.1	Интерпретация в терминах данных рассеяния . . . . .	19
4.2	Целое решение уравнения Штурма–Лиувилля . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Лекция</b>	<b>23</b>
5.1	Дискретный спектр . . . . .	23
5.2	Простота нулей $a(k)$ . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Лекция.</b>	<b>26</b>
6.1	Формула Сохоцкого–Племеля. . . . .	26
6.2	Дисперсионное соотношение. . . . .	27
6.3	Следствия дисперсионного соотношения . . . . .	28
6.4	Данные рассеяния. . . . .	29
<b>7</b>	<b>Лекция.</b>	<b>31</b>
7.1	Обратная задача: задача Римана–Гильберта . . . . .	31
7.2	Временная эволюция. . . . .	33

<b>8 Лекция.</b>	<b>36</b>
8.1 Вывод уравнения Штурма–Лиувилля из уравнений обратной задачи. . . . .	36
8.2 Солитонные решения: $r \equiv 0$ . . . . .	37
8.3 Односолитонное решение, $N = 1$ . . . . .	39
<b>9 Лекция.</b>	<b>41</b>
9.1 Двусолитонное решение, $N = 2$ . . . . .	41
9.2 Асимптотика по $t$ $N$ -солитонных решений . . . . .	43
9.3 Интегралы движения. . . . .	46
<b>10 Лекция.</b>	<b>50</b>
10.1 Вариационная производная $a(k)$ и рекурсионный оператор . . . . .	50
10.2 Оператор дуальный к $\mathcal{M}$ . . . . .	52
10.3 Резольвента оператора $\mathcal{L}$ . . . . .	52
10.4 Обобщение стандартной конструкции . . . . .	53
<b>11 Лекция</b>	<b>55</b>
11.1 Разложение $\mathcal{G}$ по $k^2$ в нуле и $l$ -ая скобка Пуассона . . . . .	55
<b>12 Лекция</b>	<b>58</b>
12.1 Примеры скобок . . . . .	58
12.2 Иерархия КдФ . . . . .	59
12.3 Скобки Гарднера и Магри . . . . .	60
<b>13 Лекция</b>	<b>62</b>
13.1 Коммутаторные тождества . . . . .	62
13.2 Операторы $A$ и $B$ . . . . .	63
<b>14 Лекция</b>	<b>66</b>
14.1 Обратная задача (процедура одевания) . . . . .	66
14.2 Старшие эволюции оператора $K$ . . . . .	67
<b>15 Лекция</b>	<b>69</b>
15.1 Коммутативность потоков . . . . .	69
15.2 Свойства символа оператора $B$ . . . . .	69
15.3 Уравнение КПП . . . . .	71
<b>16 Вопросы к зачету</b>	<b>72</b>

# 1 Лекция

## 1.1 О лошадях

### 1.1.1 Первое наблюдение “волны переноса”

Первое наблюдение уединенной волны в 1834г. сделал шотландский ученый и инженер Дж. Скотт Рассел (1808–1882). Окончив Университет Глазго в 16 лет, он работал в Отделении естественной истории в Эдинбурге, где изучал пропускную способность канала Юнион. Вот в процессе этих исследований он доложил о следующем:

“Я наблюдал за движением баржи, которую быстро тащила вдоль узкого канала пара лошадей, когда внезапно баржа остановилась – вся масса воды в канале пришла в движение; вода собралась у носа корабля в состоянии бурного волнения, затем вдруг оторвалась от него и покатила вперед с большой скоростью, приняв вид большого уединенного возвышения; округлый, гладкий, четко выраженный холм воды продолжал свое движение по каналу без видимого изменения формы или уменьшения скорости. Я бросился за этой волной верхом на лошади и догнал ее, когда она все еще двигалась со скоростью около восьми или девяти миль в час, сохраняя первоначальную форму, и имела около тридцати футов в длину и от фута до полутора футов в высоту. Ее высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял ее в изгибах канала. Так в августе месяце 1834г. произошла моя первая встреча с этим необыкновенным и прекрасным явлением, которое я назвал Волной Переноса (The Wave of Translation) ...”

В 1872г. Буссинеску предложил уравнение, описывающее длинные волны на поверхности жидкости и показал, что оно имеет решение типа уединенной волны. Однако реальный прорыв произошел в 1895г.: Кортевег и де Фриз получили уравнение распространения волн в одном направлении по поверхности мелкого канала (для невязкой, несжимаемой, однородной жидкости в постоянном поле тяжести)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.1)$$

Они показали, что это уравнение обладает уединенной волной, т.е. решением вида

$$u(x, t) = \frac{-2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t - x_0)} \quad (1.2)$$

(отклонение уровня воды от стационарного для дальнейшего удобства обозначено  $-u$ ), где параметр  $\kappa$  – произвольная положительная константа, не фиксированная уравнением. Именно эту волну и наблюдал Рассел.

### 1.1.2 Уравнение Кортевега–де Фриза – баланс дисперсии и нелинейности

Рассмотрим волновой процесс в предположении

1. отсутствия диссипации,
2. отсутствия дисперсии,
3. малости амплитуды колебаний  $\varphi_-$

Тогда волновой процесс описывается волновым уравнением:

$$\partial_t^2 \varphi_- = c^2 \partial_x^2 \varphi_- . \quad (1.3)$$

Диссипативные системы – такие системы у которых механическая энергия (сумма кинетической и потенциальной) убывает, переходя в другие формы, например в теплоту (dissipatio – рассеивание, исчезновение (лат.)).

Дисперсия (dispersio – рассеяние (лат.)) – зависимость фазовой скорости гармонической волны от ее частоты. Гармоническая (плоская) волна:

$$e^{i\omega t - ikx} , \quad (1.4)$$

где  $\omega$  – частота,  $k$  – волновой вектор,

$$\omega(k) = kv(k) \quad (1.5)$$

$v(k)$  – фазовая скорость. Групповая скорость  $= \frac{\partial \omega}{\partial k}$ . Дисперсионное соотношение – уравнение, связывающее частоту колебаний  $\omega$  и волновой вектор  $k$ :  $\omega = \omega(k)$ .

Диссипация приводит к затуханию волны, дисперсия – к расползанию и перемешиванию пакетов, а нелинейные эффекты – к укрупнению фронтов. Эффект нелинейности хорошо демонстрирует бездисперсное уравнение КдФ:

$$u_t = 6uu_x, \quad (1.6)$$

которое решается следующим образом (см. задачу 1). Найдем  $s$  из уравнения

$$s = x + 6tu_0(s),$$

где  $u_0(x)$  – начальное данное. Тогда решение задачи Коши для (1.6) дается посредством

$$u(t, x) = u_0(s(t, x)). \quad (1.7)$$

Рассмотрим как можно учесть малую нелинейность и дисперсию. Выделим из общего решения волнового уравнения  $\psi = \psi_1(x - ct) + \psi_2(x + ct)$  волну, распространяющуюся, скажем, направо:

$$\partial_t \varphi_- + c \partial_x \varphi_- = 0. \quad (1.8)$$

Учтем нелинейную поправку к фазовой скорости:  $v(k) = v_0 + v_1 k^2 + v_2 k^4 + \dots$ , так что закон дисперсии принимает вид  $\omega = ck - \beta k^3$  (член порядка  $k^2$  отсутствует, поскольку гармоническая волна должна удовлетворять дифференциальному уравнению с вещественными коэффициентами). Такой закон дисперсии дается уравнением:

$$\partial_t \varphi_- + c \partial_x \varphi_- + \beta \partial_x^3 \varphi_- = 0 \quad (1.9)$$

Теперь введем нелинейность. Уравнения (1.8) и (1.9) имеют вид законов сохранения:  $\partial_t \psi + \partial_x j = 0$ , т.е.  $\int dx \psi(x, t)$  сохраняется во времени. Добавим первую квадратичную поправку к  $j$ , что сохранит это свойство:  $j = c\psi + \beta \partial_x^2 \psi + \frac{\alpha}{2} \psi^2$ . Тогда  $\partial_t \psi + c \partial_x \psi + \beta \partial_x^3 \psi + \alpha \psi \partial_x \psi = 0$ , что после замены  $x \rightarrow x + ct$ ,  $\psi = -\frac{\beta}{\alpha} u$  дает уравнение КдФ.

### 1.1.3 Развитие теории нелинейных уравнений

В 1954г. Ферми, Паста и Улам, изучая на ЭВМ поведение цепочки нелинейных осцилляторов (что можно рассматривать как численное моделирование КдФ), обнаружили аномально медленную стохастизацию этой этой динамической системы.

В 1958г. Сагдеев показал, что в плазме могут распространяться солитоны, а Гарднер и Морикава в 1960 г. показали, что уравнения, описывающие сильную плазму аналогичны КдФ.

В 1965г. Забуски и Крускал, экспериментируя с численными решениями КдФ показали, что солитоны сталкиваются упруго и ввели само понятие “солитон”. Затем были открыты бесконечные серии законов сохранения.

Мы будем называть солитонами любые (экспоненциально) локализованные нелинейные волны, которые взаимодействуют с произвольными локальными возмущениями и всегда восстанавливают асимптотически свою форму.

В 1967г. Гарднер, Грин, Крускал и Миура предложили метод спектрального преобразования как метод решения задачи Коши

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (1.10)$$

для уравнения КдФ, где  $u_0(x)$  – заданное начальное данное. Современный вариант этого метода называется методом обратной задачи рассеяния.

В 1968г. Лакс (Peter David Lax) обобщил метод обратной задачи рассеяния и вскрыл алгебраический механизм, лежащий в основе работы Гарднера, Грина, Крускала и Миуры. Было показано, что уравнение КдФ эквивалентно **представлению Лакса**

$$\mathcal{L}_t = [\mathcal{L}, \mathcal{A}] \quad (1.11)$$

для пары дифференциальных операторов  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{A}$  (говорят также, что операторы  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{A}$  образуют **лаксову пару**):

$$\mathcal{L} = -\partial_x^2 + u, \quad (1.12)$$

$$\mathcal{A} = 4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x, \quad (1.13)$$

см. Задачу 2. Как мы увидим в дальнейшем, именно соотношение (1.11) лежит в основе применимости метода обратной задачи к нелинейным эволюционным уравнениям. Само существование и конкретный вид этих операторов, конечно, зависят от рассматриваемого нелинейного уравнения.

В 1971г. Гарднер, Захаров и Фаддеев построили теорию уравнения КдФ как гамильтоновой системы. В классической механике имеется теорема Лиувилля, согласно которой система, в которой число интегралов движения в инволюции совпадает с числом степеней свободы  $n$ , может быть полностью проинтегрирована (решена) методом разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби. Такая система является интегрируемой системой. Траектория такой системы в  $2n$ -мерном фазовом пространстве может быть представлена в подходящих переменных (переменных действие-угол) как намотка на  $n$ -мерном торе. Система, число интегралов в которой меньше числа степеней свободы, проявляет хаотическое поведение, то есть траектории в фазовом пространстве с близкими начальными условиями могут экспоненциально расходиться. При небольшой деформации интегрируемой системы в неинтегрируемую  $n$ -мерный тор в  $2n$ -мерном фазовом пространстве разрушается (“размывается”), превращаясь, например в странный аттрактор.

В 1971г. Захаров и Шабат решили методом обратной задачи нелинейное уравнение Шредингера! В 1973г. метод был применен сразу к нескольким уравнениям в работе Абловица, Каупа, Ньюэлла и Сигура. После этих работ стало понятно, что уравнение КдФ – не единственное интегрируемое уравнение!!!

В 1975г. Захаров и Шабат предложили процедуру одевания.

Помимо уравнения КдФ в XIX веке были известны: уравнение sine-Гордон и уравнения Цицейки. Для уравнения sine-Гордон, возникающего при описании поверхностей постоянной отрицательной кривизны, был открыт способ построения и “размножения” солитонных решений – преобразование Беклунда.

В создание и развитие теории солитонов огромный вклад внесли школы Фаддеева и Новикова.

**Задача 1** *Показать, что задача Коши*

$$\begin{aligned}u_t &= buu_x \\ u(0, x) &= u_0(x)\end{aligned}$$

*для бездисперсного уравнения КдФ (1.6) решается посредством равенства (1.7).*

**Задача 2** *Доказать, что (1.11), где  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{A}$  даны в (1.12) и (1.13), эквивалентно (1.1).*



## 2 Лекция

### 2.1 Многомерные уравнения.

Рассмотрим уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП)

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x = 3\sigma^2 u_{yy} \quad (2.1)$$

на вещественную функцию  $u(t, x, y)$ . Здесь  $\sigma^2 = \pm 1$ . В случае  $\sigma^2 = 1$  это уравнение называется КП, а при  $\sigma^2 = -1$  – КПИ. Уравнение КП – один из основных примеров в области интегрируемых уравнений в пространстве  $2 + 1$  измерений. В физических задачах оно возникает в самых разных контекстах и для обоих знаков  $\sigma^2$ . При этом свойства решений этих уравнений сильно зависят от выбора знака. Оператор Лакса имеет вид

$$\mathcal{L} = i\sigma\partial_y + \partial_x^2 - u(x, y), \quad \sigma = 1, i \quad (2.2)$$

Здесь мы будем рассматривать уравнение КПИ, т.е.

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x = -3u_{yy}. \quad (2.3)$$

Его пара Лакса есть

$$\mathcal{L} = -\partial_y + \partial_x^2 - u(x, y), \quad (2.4)$$

$$\mathcal{A} = 4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x - 3 \int_{\infty}^x dx' u_y(x', y), \quad (2.5)$$

так что (2.3) эквивалентно (1.11).

### 2.2 Общая схема метода обратной задачи

Рассмотрим теперь подробнее схему метода обратной задачи на примере уравнения Кортевега–де Фриза. Лаксова пара для него дана в (1.12) и (1.13):

$$\mathcal{L} = -\partial_x^2 + u, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{A} = 4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x. \quad (2.7)$$

Важнейшей особенностью пары Лакса является то, что временная производная не входит в  $\mathcal{L}$ -оператор. Таким образом мы можем рассматривать  $t$  как параметр и исследовать спектральные свойства этого оператора, т.е., исследовать решения уравнения

$$\mathcal{L}y = \lambda y, \quad (2.8)$$

где мы ввели  $\lambda = -z^2$ . Это уравнение на функцию  $y(t, x)$  есть **спектральная проблема** для оператора (1.12), иногда оно также называется **вспомогательной линейной задачей** для рассматриваемого нелинейного уравнения. Заметим, что в силу (1.11)

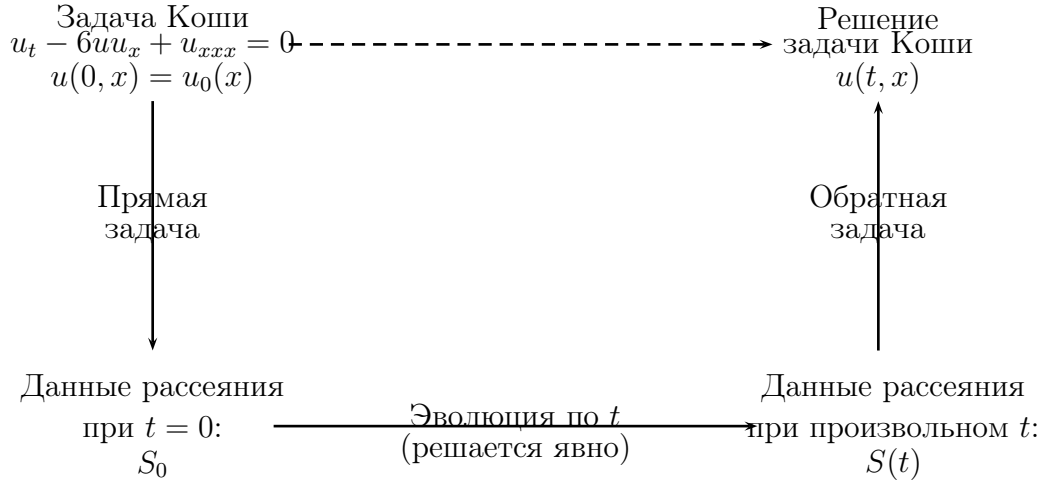
$$(\mathcal{L} - \lambda)(y_t + \mathcal{A}y) = 0, \quad (2.9)$$

т.е. комбинация  $y_t + \mathcal{A}y$  также удовлетворяет уравнению (2.8), но не обязана быть нулем. В то же время, уравнение

$$y_t = -\mathcal{A}y \quad (2.10)$$

совместно с уравнением (2.8) в силу (1.11). Здесь уместно подчеркнуть, что совместность уравнений означает лишь наличие их общего решения, но отнюдь не то, что каждое решение одного из них будет решением и другого.

Уравнение (2.8) хорошо известно в физике: это стационарное одномерное уравнение Шредингера. Впрочем, оно также исследовалось математиками еще в XIX веке (уравнение Штурма–Лиувилля). Для нас важно, что для уравнения (2.8) разрешимы прямая и обратная задачи рассеяния. Прямая задача: определение по потенциалу  $u$  данных рассеяния, которые мы обозначим  $S$ . Их определения и свойства будут даны в последующих лекциях. Обратная задача: восстановление потенциала  $u$  по данным рассеяния. При этом мы покажем как из условия достаточно быстрого убывания потенциала на пространственной бесконечности равенства (2.9) и (2.10) приводят к линейным дифференциальным уравнениям по  $t$  на данные рассеяния. Таким образом, как уже говорилось, общая схема метода обратной задачи рассеяния в применении к теории нелинейных интегрируемых уравнений демонстрируется следующей диаграммой: По заданному начальному данному  $u_0(x)$  строятся отвечающие ему данные рассеяния  $S_0$ . Далее, явно решается уравнение временной эволюции для спектральных данных, т.е. мы находим данные рассеяния  $S(t)$ . По ним, используя уравнения обратной задачи, мы восстанавливаем потенциал  $u(t, x)$ , который ввиду эквивалентности (1.11) и уравнения КдФ (1.1) есть решение этого нелинейного уравнения и поставленной задачи Коши. Таким образом, решение нелинейного



уравнения свелось к решению трех линейных задач, одна из которых решается явно! Как мы видели ранее, весь метод основан именно на разрешимости обратной задачи. Это – основное условие применимости метода. Очевидно, что для уравнения (1.1) есть и гораздо более простая “лаксова пара”:

$$\mathcal{L} = \partial_x + u, \quad \mathcal{A} = 3u^2 - u_{xx}, \quad (2.11)$$

для которой также равенство (1.11) эквивалентно уравнения КдФ (1.1). Однако, такой  $\mathcal{L}$ -оператор – преобразование подобия оператора  $\partial_x$ :

$$\mathcal{L} = \exp\left(-\int^x u(x)\right) \partial_x \exp\left(-\int^x u(x)\right),$$

где в отличие от рассмотренного ранее оператора  $K$  оператор преобразования является оператором умножения. Поэтому такой оператор  $\mathcal{L}$  имеет тривиальный спектр, не зависящий от  $u(x)$ , и соответственно, обратная задача для него не имеет смысла. Отметим, что такого рода бесполезные “пары Лакса” могут быть выписаны для любого уравнения в любом числе измерений. Поэтому, говоря об интегрируемых уравнениях, мы всегда будем иметь ввиду наличие для них лаксовой пары, в которой для оператора  $\mathcal{L}$  осмыслены прямая и обратная задачи.

## 2.3 Решения Йоста

Итак, мы на некоторое время опускаем явную зависимость от  $t$  и приступаем к исследованию спектральной задачи на всей оси ( $-\infty < x < +\infty$ ) для вещественного, ( $u(x) \in \mathbb{R}$ ), непрерывного и убывающего при больших  $x$  ( $u(x) \rightarrow 0$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ ) потенциала. Из стандартного курса квантовой механики известно, что непрерывный спектр уравнения (2.8) с оператором (1.12) (уравнение Шредингера, уравнение Штурма–Лиувилля) лежит на положительной полуоси  $\lambda \geq 0$  спектрального параметра и является двукратно вырожденным. Мы рассматриваем класс потенциалов

$$\int dx |u(x)|(1 + |x|) < \infty, \quad (2.12)$$

причем, как и ранее, мы используем символ  $\int$  в смысле  $\int_{-\infty}^{+\infty}$ . В дальнейшем мы будем получать некоторые результаты и при более жестком условии на потенциал:

$$u(x) = O\left(\frac{1}{x^{2+\epsilon}}\right) \quad \text{для некоторого } \epsilon > 0. \quad (2.13)$$

Нам будет также удобно далее обозначать спектральный параметр  $\lambda = k^2$  (т.е.  $z = ik$ ), так что уравнение (2.8) приобретает вид

$$-y_{xx} + u(x)y = k^2y, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.14)$$

при этом именно  $k$  мы будем называть спектральным параметром.

Пусть  $k \in \mathbb{R}$ . Введем два специальных решения уравнения (2.14), задав их асимптотиками на отрицательной и положительной бесконечностях, соответственно:

$$\varphi_+(x, k) = e^{-ikx} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (2.15)$$

$$\varphi_-(x, k) = e^{-ikx} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.16)$$

Эти решения известны в литературе как **решения Йоста**. Ввиду вещественности потенциала  $u(x)$  и параметра  $k$  комплексно сопряженные функции  $\bar{\varphi}_+(x, k)$  и  $\bar{\varphi}_-(x, k)$  также являются решениями уравнения (2.14). Причем в силу граничных условий (2.15), (2.16)

$$\bar{\varphi}_\pm(x, k) = \varphi_\pm(x, -k). k \in \mathbb{R} \quad (2.17)$$

Чтобы убедиться в существовании всех введенных решений, заметим, что дифференциальное уравнение (2.14) совместно с граничными условиями (2.15) или (2.16), соответственно, эквивалентно интегральным уравнениям

$$\varphi_{\pm}(x, k) = e^{-ikx} + \int_{\mp\infty}^x dx' \frac{\sin k(x-x')}{k} u(x') \varphi_{\pm}(x', k). \quad (2.18)$$

Задача 3. Эти уравнения принадлежат классу Вольтерра, а потому однозначно разрешимы при условии (2.12) на потенциал. Введем вспомогательные функции

$$\chi_{\pm}(x, k) = e^{ikx} \varphi_{\pm}(x, k), \quad (2.19)$$

удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$-\chi_{\pm,xx}(x, k) + 2ik\chi_{\pm,x} + u(x)\chi_{\pm} = 0. \quad (2.20)$$

Тогда вместо (2.18) мы имеем

$$\chi_{\pm}(x, k) = 1 + \int_{\mp\infty}^x dx' \frac{e^{2ik(x-x')} - 1}{2ik} u(x') \chi_{\pm}(x', k). \quad (2.21)$$

Очевидно, что при равенство при верхнем (нижнем) знаке допускает аналитическое продолжение на верхнюю (нижнюю) полуплоскость  $k \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}k \geq 0$  (соответственно,  $k \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}k \leq 0$ , поскольку экспоненты в подынтегральных выражениях в этих областях убывают).

**Задача 3** Доказать, что уравнение (2.18) эквивалентно уравнению (2.14) и условию (2.15) или (2.16), соответственно.

### Литература:

В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский, “Теория солитонов: Метод обратной задачи”, “Наука”, 1980.

Ф.Калоджеро, А.Дегасперис, “Спектральные преобразования и солитоны”, “Мир”, 1985.

## 3 Лекция

### 3.1 Решения Йоста (окончание)

Свойства функций  $\chi_{\pm}(x, k)$  дают следующие леммы.

**Лемма 3.1** (Фаддеев) *Существует такая константа  $K$ , что:*

$$|\chi_+(x, k) - 1| \leq K \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^x dx' |u(x')|, \quad \text{Im}k \geq 0 \quad (3.1)$$

$$|\chi_+(x, k) - 1| \leq K \int_{-\infty}^x dx' |x' u(x')|, \quad \text{Im}k \geq 0$$

$$|\partial_x \chi_+(x, k)| \leq K \int_{-\infty}^x dx' |u(x')|, \quad \text{Im}k \geq 0$$

Кроме того, функция  $\chi_{+,k}(x, k)$  непрерывно дифференцируема по  $k \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}k \geq 0$  за исключением, может быть, точки  $k = 0$ . При этом выполнена оценка:

$$|\partial_k \chi_+(x, k)| \leq \frac{K}{|k|}, \quad \text{Im}k \geq 0 \quad (3.2)$$

**Лемма 3.2** *Существует*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \chi_+(x, k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy \chi_+(y, k) u(y) \quad (3.3)$$

*Доказательство* По предыдущей лемме  $\chi_+(x, k)$  ограничена при всех  $-\infty \leq x \leq +\infty$ ,  $k \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}k \geq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x dy e^{2ik(x-y)} \chi_+(y, k) u(y) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^0 dy e^{-2iky} \chi_+(y+x, k) u(y+x) = 0 \end{aligned}$$

в силу (2.13). Теперь (3.3) следует в силу (2.21).

### 3.2 Асимптотическое поведение решений Йоста по $k$ .

Интегральные уравнения (2.21) позволяют уточнить указанное в Лемме 3.1 асимптотическое поведение по  $k$ . Действительно, как уже говорилось, слагаемые с экспонентами убывают, а потому по (3.1):

$$\chi_{\pm}(x, k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{\mp\infty}^x dx' u(x') + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \in \mathbb{C}, \quad \text{Im}k \gtrless 0. \quad (3.4)$$

Эти формулы позволяют восстановить потенциал  $u(x)$  (точнее говоря, его первообразную) по известным решениям Йоста.

Укажем также обобщение на комплексный случай соотношений (2.17):

$$\overline{\varphi_{\pm}(x, k)} = \varphi_{\pm}(x, -\bar{k}), \quad \text{Im}k \gtrless 0, \quad (3.5)$$

что следует из указанных свойств аналитичности в соответствующих полуплоскостях. В частности отсюда следует, что при чисто мнимых  $k = ip$ ,  $\text{Im}p = 0$  решения Йоста вещественны:

$$\text{Im}\varphi_{\pm}(x, \pm ip) = 0, \quad p \geq 0 \quad (3.6)$$

### 3.3 Матрица монодромии

Пары решений  $\varphi_+$ ,  $\overline{\varphi_+}$  и  $\varphi_-$ ,  $\overline{\varphi_-}$  линейно независимы при вещественных  $k$ , отличных от нуля. Действительно, пусть

$$W(f, g) = fg_x - f_xg \quad (3.7)$$

означает вронскиан функций  $f$  и  $g$ . Обращение вронскиана в ноль эквивалентно пропорциональности функций  $f$  и  $g$ . Хорошо известно (Задача 4), что если  $f$  и  $g$  удовлетворяют уравнению (2.14), то

$$\partial_x W(f, g) = 0. \quad (3.8)$$

таким образом для вычисления значений вронскианов решений Йоста можно воспользоваться их асимптотическим поведением (2.15) и (2.16), что дает (Задача 5)

$$W(\varphi_+, \overline{\varphi_+}) = W(\varphi_-, \overline{\varphi_-}) = 2ik. \quad (3.9)$$

Итак при  $k \neq 0$  решение  $\varphi_+$  линейно независимо от  $\bar{\varphi}_+$  и аналогично для пары  $\varphi_-$ ,  $\bar{\varphi}_-$ . Поскольку уравнение (2.14), как и всякое уравнение второго порядка, может иметь не более двух линейно независимых решений, то каждая из этих пар образует полный набор. Таким образом существует постоянная (т.е. не зависящая от  $x$ ) **(приведенная) матрица монодромии**  $T(k)$  такая, что

$$\begin{pmatrix} \varphi_+(x, k) \\ \bar{\varphi}_+(x, k) \end{pmatrix} = T(k) \begin{pmatrix} \varphi_-(x, k) \\ \bar{\varphi}_-(x, k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

где

$$T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ \bar{b}(k) & \bar{a}(k) \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

где мы учли, что вторая строка в (3.10) является комплексно сопряженной к первой. Отметим, что в соответствии с предыдущим обсуждением точку  $k = 0$  мы в дальнейшем рассмотрим отдельно.

Первая строка равенства (3.10) имеет вид

$$\varphi_+(x, k) = a(k) \varphi_-(x, k) + b(k) \bar{\varphi}_-(x, k), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (3.12)$$

что ввиду (2.17), т.е. в силу вещественности потенциала  $u(x)$ , означает, выполнение соотношений

$$\bar{a}(k) = a(-k), \quad \bar{b}(k) = b(-k), \quad k \in \mathbb{R} \quad (3.13)$$

для элементов матрицы монодромии. Для того, чтобы найти явное выражение этих элементов через потенциалы и решения Йоста, запишем (2.18) как

$$\begin{aligned} \varphi_+(x, k) = & e^{-ikx} + \frac{e^{ikx}}{2ik} \int dx' e^{-ikx'} \varphi_+(x', k) u(x') - \\ & - \frac{e^{-ikx}}{2ik} \int dx' e^{ikx'} \varphi_+(x', k) u(x') - \\ & - \int_x^{+\infty} dx' \frac{\sin k(x-x')}{k} \varphi_+(x', k) u(x'). \end{aligned} \quad (3.14)$$



Тогда в силу (3.12)

$$\begin{aligned}
a(k) \varphi_-(x, k) + b(k) \overline{\varphi}_-(x, k) &= e^{-ikx} \left( 1 - \frac{1}{2ik} \int dx' e^{ikx'} \varphi_+(x', k) u(x') \right) + \\
&+ \frac{e^{ikx}}{2ik} \int dx' e^{-ikx'} \varphi_+(x', k) u(x') + \\
&+ a(k) (\varphi_-(x, k) - e^{-ikx}) + \\
&+ b(k) (\overline{\varphi}_-(x, k) - e^{ikx}),
\end{aligned}$$

так что

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy e^{iky} \varphi_+(y, k) u(y) \equiv 1 - \frac{1}{2ik} \int dy \chi_+(y, k) u(y) \quad (3.15)$$

и

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int dy e^{-iky} \varphi_+(y, k) u(y). \quad (3.16)$$

Ввиду доказанной ранее аналитичности  $\chi_+$  в области  $\text{Im}k > 0$ , видно, что и функция  $a(k)$  также аналитична в верхней полуплоскости и задается равенством (3.15) при  $\text{Im}k \geq 0$ . Что касается функции  $b(k)$ , то она, вообще говоря, не продолжается с вещественной прямой  $\text{Im}k = 0$ . Для ее продолжимости в комплексную область следует потребовать, например, чтобы потенциал  $u(x)$  убывал с ростом  $x$  быстрее любой линейной экспоненты, что сильно сужает класс рассматриваемых потенциалов, а потому мы не будем накладывать это условие.

Отметим, что в силу (3.1)

$$a(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{Im}k > 0 \quad (3.17)$$

а в силу (3.3)

$$a(k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \chi_+(x, k) \quad (3.18)$$

Аналогично предыдущему можно получить при  $\text{Im}k \geq 0$  представления

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy e^{-iky} \overline{\varphi}_-(y, k) u(y) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy \overline{\chi}_-(y, \overline{k}) u(y), \quad (3.19)$$

где, в соответствии с предыдущим, функция  $\overline{\varphi}_-(x, k)$  аналитична в верхней полуплоскости переменной  $k$ , поскольку  $\overline{\varphi}_-(x, k) \equiv \overline{\varphi}_-(x, \overline{k})$  и аналогично  $\overline{\chi}_-$ . Кроме того:

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int dy e^{-iky} \varphi_-(y, k) u(y), \quad \text{Im}k = 0, \quad (3.20)$$

см. Задачу 6.

### 3.4 Свойства элементов матрицы монодромии.

Полученные выражения для функций  $a(k)$  и  $b(k)$  показывают, что в точке  $k = 0$  обе они, вообще говоря, имеют полюсную особенность:

$$a(k) = \frac{ic}{k} + O(1), \quad b(k) = \frac{-ic}{k} + O(1), \quad k \rightarrow 0, \quad (3.21)$$

причем в силу (3.15) или (3.16)

$$c = \frac{1}{2} \int dy \varphi_+(y, 0) u(y), \quad (3.22)$$

что вещественно в силу вещественности потенциала и (2.17), т.е. опять-таки в силу вещественности потенциала. Тогда, мы видим, что соотношение (3.12) выполняется и в точке  $k = 0$ : предел правой части при  $k \rightarrow 0$  существует по Лемме (3.1), а предел правой части существует опять же в силу этой Леммы, условия (2.17) и (3.21) и равен

$$\varphi_+(x, 0) = 2ic \varphi_{-,k}(x, 0) + \tilde{c} \varphi_-(x, 0), \quad (3.23)$$

где  $\tilde{c}$  — некоторая константа. По условию нормировки (2.16):  $\varphi_{-,k}(x, 0) = -ix + O(1)$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Таким образом равенство (3.21) имеет прозрачный смысл: решение, ограниченное на левом конце оси  $x$ -ов ( $\varphi(x, 0) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow -\infty$ ), на правом конце представляет собой линейную комбинацию линейно растущего ( $\varphi_{-,k}(x, 0)$ ) и ограниченного ( $\varphi_-(x, 0)$ ) решений. Понятно, что для потенциалов общего положения  $c \neq 0$ . Если же выполнено условие  $c = 0$ , т.е. каждое решение ограниченное на левом конце остается ограниченным и на правом (легко убедиться, что это утверждение справедливо и в случае, если ‘левое’ и ‘правое’ поменять местами), называются **потенциалами с квазиуровнем при нулевой энергии**.

**Предел малых  $u$ .** В первом порядке по потенциалу  $u$  элемент  $b(k)$  матрицы монодромии переходит в преобразование Фурье потенциала, как следует из (3.16):

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int dy e^{-2iky} u(y) + O(u^2) \quad (3.24)$$

Элементы  $a$  и  $b$  матрицы монодромии не независимы. Действительно, подставляя (3.12) в первое равенство в (3.9), мы в силу второго равенства получаем унимодулярность матрицы монодромии (Задача 7)

$$\det T(k) \equiv |a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.25)$$

Тогда обратная матрица  $T(k)^{-1}$  равна

$$T(k)^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a}(k) & -b(k) \\ -\bar{b}(k) & a(k) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

а обращение равенства (3.12) имеет вид

$$\varphi_-(x, k) = \bar{a}(k)\varphi_+(x, k) - b(k)\overline{\varphi_+(x, k)}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.27)$$

Отметим также, что в силу, например, равенств (3.12) и (3.9) элементы матрицы монодромии также могут быть выражены посредством соответствующих вронскианов:

$$a(k) = \frac{W(\varphi_+(x, k), \overline{\varphi_-(x, k)})}{2ik}, \quad k \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} k \geq 0, \quad (3.28)$$

$$b(k) = \frac{W(\varphi_+(x, k), \varphi_-(x, k))}{-2ik}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.29)$$

Заметим, что равенство (3.28) дает еще одно доказательство аналитической продолжимости  $a(k)$  в верхнюю полуплоскость. При этом, как обычно, мы понимаем  $\overline{\varphi_-(x, k)}$  как аналитическое продолжение функции комплексно сопряженной к  $\varphi_-$ . Иными словами:  $\overline{\varphi_-(x, k)} \equiv \overline{\varphi_-(x, \bar{k})}$ .

**Задача 4** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  – произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Доказать, что для любых таких  $f$  и  $g$ , удовлетворяющих (2.14), выполнено (3.8).
2. Доказать, что для любых таких  $f$  и  $g$ , удовлетворяющих (3.8), найдется такая функция  $u(x)$ , что выполнено (2.14).

**Задача 5** Доказать (3.9).

**Задача 6** Доказать (3.19) и (3.20).

**Задача 7** Доказать (3.25).

## 4 Лекция

### 4.1 Интерпретация в терминах данных рассеяния

Рассмотрим нестационарное уравнение Шредингера:

$$i\tilde{\varphi}_t = \mathcal{L}\tilde{\varphi}$$

**Внимание!** ‘Время’  $t$  в этом уравнении не имеет никакого отношения к временной эволюции уравнения КдФ.

На пространственных бесконечностях решения этого уравнения имеют вид плоских волн:  $\tilde{\varphi}(t, x, k) = e^{-i(\omega t \pm kx)} + o(1)$ , где  $\omega = k^2$ . Верхний знак отвечает при  $k > 0$  волне, движущейся справа налево, а нижний знак — слева направо. В то же время, учитывая (2.16) и (3.12) мы имеем при  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\frac{\varphi_+(x, k)}{a(k)} = e^{-ikx} + \frac{b(k)}{a(k)}e^{ikx} + o(1),$$

где первое слагаемое является падающей, а второе — отраженной волнами. Именно для того, чтобы при падающей волне был единичный коэффициент, мы поделили  $\varphi_+$  на  $a$ . Заметим, что терминология задачи рассеяния, конечно, возникла из рассмотрения радиальной части трехмерного уравнения Шредингера, что объясняет возникновение названий волн: действительно, падающей в таком случае является волна, приходящая с положительной бесконечности, т.е. из области бесконечно больших радиусов. Аналогично при  $x \rightarrow -\infty$  получаем прошедшую волну:

$$\frac{\varphi_+(x, k)}{a(k)} = \frac{e^{-ikx}}{a(k)} + o(1).$$

Таким образом естественно ввести величины

$$t(k) = \frac{1}{a(k)}, \quad r(k) = \frac{b(k)}{a(k)}, \quad (4.1)$$

называемые, соответственно, **коэффициентами прохождения и отражения**. Введенные величины не независимы. В силу (3.25):

$$|t(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1, \quad (4.2)$$

а в силу (3.13):

$$\bar{t}(k) = t(-k), \quad \bar{r}(k) = r(-k). \quad (4.3)$$

Выполнены, также, следующие свойства:

$$|r(k)| < 1, \quad k \neq 0, \quad (4.4)$$

$$r(k) = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad (4.5)$$

$$\int dx(1 + |x|)|B_x(x)| < \infty, \quad \text{где } B(x) = \int dk e^{ikx}b(k), \quad (4.6)$$

которые мы приводим здесь без доказательства. Отметим также, что в силу (3.25) и (4.1)

$$|a(k)|^2 = \frac{1}{1 - |r(k)|^2} \quad (4.7)$$

## 4.2 Целое решение уравнения Штурма–Лиувилля

Введем еще одно решение уравнения Штурма–Лиувилля, полезное при построении функции Грина этого уравнения. Пусть  $s(x, y, k)$  удовлетворяет по  $x$  уравнению (2.14) и задано граничными условиями в точке  $x = y$ :

$$\begin{aligned} s(x, x, k) &= 0, \\ s_x(x, y, k) \Big|_{x=y} &= 1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Это решение задается интегральным уравнением

$$s(x, y, k) = \frac{\sin k(x - y)}{k} + \int_y^x dx' \frac{\sin k(x - x')}{k} u(x')s(x', y, k) \quad (4.9)$$

и, как легко видеть, определяет целую функцию  $k$  при всех  $k \in \mathbb{C}$ . В силу этого уравнения

$$s(x, y, -k) = s(x, y, k), \quad k \in \mathbb{C}, \quad (4.10)$$

$$\overline{s(x, y, k)} = s(x, y, \bar{k}), \quad (4.11)$$

т.е. функция  $s(x, y, k)$  вещественна при вещественном  $k$ .

Легко также проверить (Задача 8), что в силу равенств (3.12), (3.9), (3.28), (3.29) и (3.27) выполнены следующие представления:

$$s(x, y, k) = \begin{cases} \frac{\varphi_+(x, k)\overline{\varphi}_-(y, k) - \varphi_+(y, k)\overline{\varphi}_-(x, k)}{-2ika(k)}, & \text{при } \text{Im}k \geq 0, \\ \frac{\overline{\varphi}_+(x, k)\varphi_-(y, k) - \overline{\varphi}_+(y, k)\varphi_-(x, k)}{2ik\bar{a}(k)}, & \text{при } \text{Im}k \leq 0, \\ \frac{\varphi_+(x, k)\overline{\varphi}_+(y, k) - \varphi_+(y, k)\overline{\varphi}_+(x, k)}{-2ik}, & \text{при } k \in \mathbb{R}, \\ \frac{\varphi_-(x, k)\overline{\varphi}_-(y, k) - \varphi_-(y, k)\overline{\varphi}_-(x, k)}{-2ik}, & \text{при } k \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Для доказательства, например, первого равенства выберем  $k$  в верхней полуплоскости. В силу (3.28) полный набор линейно-независимых решений уравнения (2.14) в этом случае есть  $\varphi_+(x, k)$  и  $\overline{\varphi}_-(x, k)$ . Поскольку  $s(x, y, k)$  также удовлетворяет (по  $x$ ) уравнению Штурма–Лиувилля, то найдутся такие, независимые от  $x$ , функции  $\alpha(y, k)$ ,  $\beta(y, k)$ , что

$$s(x, y, k) = \varphi_+(x, k)\alpha(y, k) + \overline{\varphi}_-(x, k)\beta(y, k).$$

Тогда получаем равенства

$$\begin{aligned} \varphi_+(x, k)\alpha(x, k) + \overline{\varphi}_-(x, k)\beta(x, k) &= 0, \\ \varphi_{+,x}(x, k)\alpha(x, k) + \overline{\varphi}_{-,x}(x, k)\beta(x, k) &= 1, \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha(y, k) = \frac{-\overline{\varphi}_-(y, k)}{W[\varphi_+(y, k), \overline{\varphi}_-(y, k)]}, \quad \beta(y, k) = \frac{\varphi(y, k)}{W[\varphi_+(y, k), \overline{\varphi}_-(y, k)]}$$

Теперь первое равенство в (4.12) следует из (3.28). Остальные равенства доказываются аналогично, либо следуют из (3.12) и (3.27). Заметим, что попутно мы доказали, что  $s(x, y, k)$  удовлетворяет (2.14) по переменной  $y$ .

Для демонстрации полезности решения  $s(x, y, k)$  рассмотрим следующий пример. Пусть  $\tilde{\varphi}_+(x, k)$  – решение Йоста, заданное условием (2.15) и отвечающее некоторому новому потенциалу  $\tilde{u}$ . Интегральное уравнение для него можно записать как задачу рассеяния на фоне исходного потенциала  $u$ :

$$\tilde{\varphi}_+(x, k) = \varphi_+(x, k) + \int_{-\infty}^x dy s(x, y, k) (\tilde{u}(y) - u(y)) \tilde{\varphi}_+(y, k). \quad (4.13)$$

Отсюда следует, в частности, выражение для вариационных производных функций Йоста:

$$\frac{\delta\varphi_+(x, k)}{\delta u(y)} = s(x, y, k)\varphi_+(y, k)\theta(x - y), \quad (4.14)$$

$$\frac{\delta\varphi_-(x, k)}{\delta u(y)} = -s(x, y, k)\varphi_-(y, k)\theta(y - x), \quad (4.15)$$

где второе равенство выведено аналогично.

**Задача 8** Доказать (4.12).

**Задача 9** Доказать, что

$$\varphi_{+,k}(x, k) = \varphi_+(x, k) \left( -ix + \frac{1}{2k} \right) - 2k \int_{-\infty}^x dy \left[ s(x, y, k)\varphi_+(y, k) + \frac{\varphi_+(x, k)}{2ki} \right].$$

## 5 Лекция

### 5.1 Дискретный спектр

Рассмотрим дискретный спектр:

$$\mathcal{L} y_n(x) = \lambda_n y_n(x), \quad (5.1)$$

где  $y_n(x) \neq 0$  и  $y_n(x) \in \mathcal{L}_2$ :

$$\int dx |y_n(x)|^2 < \infty \quad (5.2)$$

Поскольку оператор  $\mathcal{L}$  — самосопряженный, то все собственные значения вещественны. Действительно,

$$\lambda_n \int dx |y_n(x)|^2 = \int dx \overline{y_n(x)} \mathcal{L} y_n(x) = \bar{\lambda}_n \int dx |y_n(x)|^2,$$

так что

$$\lambda_n = \bar{\lambda}_n. \quad (5.3)$$

Предположим, что  $\lambda_n = k^2 \geq 0$ . Тогда, как мы знаем, решения осциллируют на бесконечности как  $\sim e^{ikx}$  (или имеют линейное поведение при  $k = 0$ ), а тем самым не принадлежат  $\mathcal{L}_2$ . Итак

$$\lambda_n = -\kappa_n^2, \quad (5.4)$$

причем для определенности будем считать, что

$$\kappa_n > 0. \quad (5.5)$$

Пусть  $p \in \mathbb{R}$  и пусть  $p > 0$ . Как мы знаем:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_+(x, ip) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_-(x, -ip) = 0. \quad (5.6)$$

На противоположных бесконечностях:

$$\varphi_+(x, ip) = a(ip)e^{px} + o(e^{px}), \quad p > 0, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (5.7)$$

$$\varphi_-(x, -ip) = a(ip)e^{-px} + o(e^{-px}), \quad p > 0, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (5.8)$$

Итак, для убывания одного из этих решений (а тогда и обоих) на обеих бесконечностях необходимо, чтобы

$$a(i\kappa_n) = 0. \quad (5.9)$$



Введем обозначения:

$$\varphi_{+,n}(x) = \varphi_+(x, i\kappa_n), \quad \varphi_{-,n}(x) = \overline{\varphi_-}(x, i\kappa_n) = \varphi_-(x, -i\kappa_n). \quad (5.10)$$

Ввиду (5.9) это означает, что эти решения пропорциональны друг другу, т.е. существуют такие константы  $b_n$ , что

$$\varphi_{+,n}(x) = b_n \varphi_{-,n}(x), \quad (5.11)$$

причем в силу вещественности решений, эти константы также вещественны. Теперь в силу (5.11) мы видим, что условие (5.9) также и достаточно, чтобы  $\varphi_{+,n}(x)$  или  $\varphi_{-,n}(x)$  были собственными функциями, поскольку они стремятся к нулю на противоположных бесконечностях:

$$\varphi_{+,n}(x) = \begin{cases} b_n e^{-\kappa_n x}, & x \rightarrow +\infty \\ e^{\kappa_n x}, & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (5.12)$$

Равенство (5.9) определяет  $\kappa_n$  как условие существования убывающего решения уравнения

$$(\mathcal{L} + \kappa_n^2) \varphi_{+,n}(x) = 0. \quad (5.13)$$

## 5.2 Простота нулей $a(k)$

Покажем, что нули  $a(k)$  простые. Продифференцируем для этого по  $k$  уравнение Штурма–Лиувилля на решение Йоста. Тогда

$$(\mathcal{L} + \kappa_n^2) \varphi_{+,k}(x, i\kappa_n) = 2i\kappa_n \varphi_+(x, i\kappa_n). \quad (5.14)$$

В силу (2.19) и (3.18) мы имеем асимптотическое поведение

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ikx} \varphi_+(x, k) = a(k), \quad \text{Im}k > 0, \quad (5.15)$$

так что

$$\varphi_{+,k}(x, i\kappa_n) = a'(i\kappa_n) e^{\kappa_n x} + o(e^{\kappa_n x}), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (5.16)$$

хотя, строго говоря, эту асимптотику следует выводить из (3.14), чтобы избежать предположения о дифференцируемости асимптотики (5.15). Теперь, перебрасывая в силу (5.15) и (5.16) производные, получаем

$$\begin{aligned} \int dx \varphi_+(x, i\kappa_n) \partial_x^2 \varphi_{+,k}(x, i\kappa_n) &= 2b_n \kappa_n a'(i\kappa_n) + \\ &+ \int dx \varphi_{+,k}(x, i\kappa_n) \partial_x^2 \varphi_+(x, i\kappa_n), \end{aligned} \quad (5.17)$$

так что по (5.14)

$$\int dx \varphi_+(x, i\kappa_n) (\mathcal{L} + \kappa_n^2) \varphi_{+,k}(x, i\kappa_n) = -2\kappa_n a'(i\kappa_n) b_n.$$

Тогда

$$\int dx \varphi_+(x, i\kappa_n)^2 = ia'(i\kappa_n) b_n.$$

Левая часть этого равенства положительна, так что  $\text{Im}(ia'(i\kappa_n)) = 0$  и

$$a'(i\kappa_n) \neq 0, \tag{5.18}$$

причем

$$\text{sgn}(ia'(i\kappa_n)) = \text{sgn} b_n. \tag{5.19}$$

Отсюда следует, в частности, что  $s(x, y, k)$  не имеет особенностей при  $k = i\kappa_n$ .

**Задача 10** Доказать (5.17).

## 6 Лекция.

### 6.1 Формула Сохоцкого–Племеля.

Здесь нам потребуется известная формула Сохоцкого–Племеля, которую мы выведем в весьма упрощенном случае. Пусть  $f(x)$  – непрерывная, непрерывно дифференцируемая функция  $x \in \mathbb{R}$ , интегрируемая на всей оси. Рассмотрим  $\int \frac{dx f(x)}{x \pm i\epsilon}$ , где  $\epsilon > 0$ . Нас интересует предел этого интеграла при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Запишем

$$\int \frac{dx f(x)}{x \pm i\epsilon} = \int_{|x|>1} \frac{dx f(x)}{x \pm i\epsilon} + \int_{-1}^1 dx \frac{f(x) - f(0)}{x \pm i\epsilon} + f(0) \int_{-1}^1 dx \frac{1}{x \pm i\epsilon}.$$

Таким образом, предел правой части, если он существует, равен

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{dx f(x)}{x \pm i\epsilon} = \int_{|x|>1} \frac{dx f(x)}{x} + \int_{-1}^1 dx \frac{f(x) - f(0)}{x} + f(0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log \frac{1 \pm i\epsilon}{-1 \pm i\epsilon},$$

поскольку первые два интеграла, очевидно, сходятся, а третий интеграл мы вычислили явно, где логарифм определен с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Этот предел также существует и равен

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log \frac{1 \pm i\epsilon}{-1 \pm i\epsilon} = \mp i\pi.$$

Это доказывает существование предела левой части. Соответствующее предельное значение принято обозначать

$$\int \frac{dx f(x)}{x \pm i0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{dx f(x)}{x \pm i\epsilon}.$$

Далее, используя стандартное определение интеграла в смысле главного значения, можно упростить предыдущее выражение:

$$\int_{-1}^1 dx \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left( \int_{-1}^{-\delta} + \int_{\delta}^1 \right) dx \frac{f(x) - f(0)}{x} = \text{p.v.} \int_{-1}^1 \frac{dx f(x)}{x}.$$

Суммируя все сказанное, мы приходим к формуле Сохоцкого–Племеля:

$$\int \frac{dx f(x)}{x \pm i0} = \text{p.v.} \int \frac{dx f(x)}{x} \mp i\pi f(0), \quad (6.1)$$

которую также часто записывают в виде

$$\frac{1}{x \pm i0} = \text{p.v.} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x), \quad (6.2)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака – классический пример обобщенной функции.

## 6.2 Дисперсионное соотношение.

Вернемся к исследованию элементов матрицы монодромии. Введем функцию

$$a_1(k) = a(k) \prod_{n=1}^N \frac{k + i\kappa_n}{k - i\kappa_n}, \quad (6.3)$$

Для  $k \in \mathbb{R}$ :  $|a_1(k)| = |a(k)|$ . Эта функция продолжается в верхнюю полуплоскость по переменной  $k$  и по доказанному ранее, не имеет там нулей. Поэтому функция  $\ln a_1(k)$  аналитична в  $\text{Im}k > 0$ , и убывает на бесконечности:  $\ln a_1(k) \rightarrow 0$ ,  $|k| \rightarrow \infty$ . Тогда в силу леммы Жордана для любого  $k$  в нижней полуплоскости,  $\text{Im}k < 0$ , выполняется тождественно

$$\int dk' \frac{\ln a_1(k')}{k' - k} = 0,$$

так что в пределе  $\text{Im}k \rightarrow -0$ , получаем:

$$\int dk' \frac{\ln a_1(k')}{k' - k + i0} = 0. \quad (6.4)$$

Далее, как известно, имеется формула Сохоцкого–Племеля (6.2), где обобщенные функции  $\wp \frac{1}{k}$  и  $\delta(k)$  вещественны. Тогда вещественная часть тождества (6.4) дает

$$\arg a_1(k) = -\frac{1}{\pi} \wp \int dk' \frac{\ln |a_1(k')|}{k' - k}.$$

Таким образом:

$$a_1(k) = \exp \left\{ \ln |a(k)| - \frac{i}{\pi} \wp \int dk' \frac{\ln |a(k')|}{k' - k} \right\},$$

что можно переписать в виде

$$a_1(k) = \exp \left\{ -\frac{i}{\pi} \int dk' \ln |a(k')| \left( \wp \frac{1}{k' - k} + i\pi\delta(k' - k) \right) \right\},$$

т.е. в силу (6.2) как

$$a_1(k) = \exp \left\{ \frac{-i}{\pi} \int dk' \frac{\ln |a(k')|}{k' - k - i0} \right\}.$$

Значит, по (4.7),

$$a(k) = \prod_{n=1}^N \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} \exp \left( \frac{i}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k' - k - i0} \right), \quad \text{Im}k = 0, \quad (6.5)$$

или

$$a(k) = \prod_{n=1}^N \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} \exp \left( \frac{i}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k' - k} \right), \quad \text{Im}k > 0. \quad (6.6)$$

Итак,  $a(k)$  восстанавливается по  $|r(k)|$  и набору  $\kappa_1, \dots, \kappa_N$ . Теперь и  $b(k)$  можно тоже восстановить по  $r(k)$  и набору  $\kappa_1, \dots, \kappa_N$ :

$$b(k) = r(k)a(k). \quad (6.7)$$

### 6.3 Следствия дисперсионного соотношения

Из дисперсионного соотношения следует много полезных фактов. С некоторыми из них мы будем знакомиться дальше. Сейчас отметим, что функция  $a(k)$  вещественна при чисто мнимых значениях аргумента, т.е.  $\text{Im}(a(ip)) = 0$ , поскольку

$$a(ip) = \prod_{n=1}^N \frac{p - \kappa_n}{p + \kappa_n} \exp \left\{ \frac{p}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k'^2 + p^2} \right\}, \quad p > 0. \quad (6.8)$$

Удобно упорядочить собственные значения уравнения (5.1) так, чтобы

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N, \quad (6.9)$$

так что по (5.4):

$$\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_N. \quad (6.10)$$

Тогда из (6.8) имеем :

$$\text{sgn } a(ip) = \begin{cases} +1, & p > \kappa_1, \\ (-1)^n, & \kappa_n > p > \kappa_{n+1}, \quad n = 1, \dots, N-1, \\ (-1)^N, & \kappa_N > p. \end{cases} \quad (6.11)$$

Более того, для производной получаем, что

$$ia'(i\kappa_n) = \frac{1}{2\kappa_n} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \frac{\kappa_n - \kappa_m}{\kappa_n + \kappa_m} \exp \left\{ \frac{\kappa_n}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k'^2 + \kappa_n^2} \right\}, \quad (6.12)$$

так что

$$\operatorname{sgn}(ia'(i\kappa_n)) = (-1)^n, \quad (6.13)$$

а тогда по (5.19) и

$$b_n = (-1)^{n-1} |b_n|. \quad (6.14)$$

Точно также, по (3.22) получаем, что

$$c = (-1)^N |c|. \quad (6.15)$$

## 6.4 Данные рассеяния.

Введем вместо  $b_n$  новые переменные

$$\beta_n = \frac{b_n}{ia'(i\kappa_n)} > 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (6.16)$$

которые удобны тем, что в силу (5.19) они положительны. В качестве данных рассеяния (спектральных данных) мы выбираем

$$S = \{r(k), \kappa_n, \beta_n, n = 1, \dots, N\}. \quad (6.17)$$

Потенциалы, которым отвечает нулевой коэффициент прохождения:

$$r(k) \equiv 0, \quad (6.18)$$

называются **безотражательными**.

Как мы видели ранее, по данным рассеяния однозначно восстанавливаются элементы матрицы монодромии  $a(k)$ ,  $b(k) = a(k)r(k)$  и  $b_n = i\beta_n a'(i\kappa_n)$ . Покажем, что по ним также однозначно восстанавливается и потенциал.

**Задача 11** Значения решений Йоста в точках  $\lambda = \kappa_n$  в силу (2.18) и (5.10) даются как

$$\varphi_{+,n}(x) = e^{\kappa_n x} + \int_{-\infty}^x dy \frac{\operatorname{sh} \kappa_n(x-y)}{\kappa_n} u(y) \varphi_{+,n}(y), \quad (6.19a)$$

$$\varphi_{-,n}(x) = e^{-\kappa_n x} - \int_x^{\infty} dy \frac{\operatorname{sh} \kappa_n(x-y)}{\kappa_n} u(y) \varphi_{-,n}(y). \quad (6.19b)$$

Показать, что коэффициент  $b_n$  (5.11)

$$b_n = \frac{-1}{2\kappa_n} \int dy e^{\kappa_n y} u(y) \varphi_{+,n}(y). \quad (6.20)$$

**Замечание 6.1** Это значение совпадает с формальным продолжением выражения (3.16) в точку  $k = i\kappa_n$ . Однако, такое продолжение существует лишь для узкого класса потенциалов, например, убывающих на бесконечности быстрее любой линейной экспоненты. В общем же случае потенциалов, удовлетворяющих (2.12) или (2.13), такое продолжение не существует.

## 7 Лекция.

### 7.1 Обратная задача: задача Римана–Гильберта

Задача Римана–Гильберта – задача восстановления функции аналитической вне и внутри некоторого контура по линейному уравнению на ее предельные значения на контуре и нормировке на бесконечности. Покажем, что обратная задача, т.е. задача восстановления потенциала в уравнении Штурма–Лиувилля по данным рассеяния, является специальным случаем задачи Римана–Гильберта. В силу (2.19) перепишем (3.12) в виде

$$\frac{\chi_+(x, k)}{a(k)} = \chi_-(x, k) + r(k)\bar{\chi}_-(x, k)e^{2ikx}. \quad (7.1)$$

Введем функцию комплексного переменного

$$X(x, k) = \begin{cases} \frac{\chi_+(x, k)}{a(k)}, & \text{Im}k > 0 \\ \chi_-(x, k), & \text{Im}k < 0 \end{cases}, \quad (7.2)$$

и пусть  $X_{\pm}(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow \pm 0} X(k + i\epsilon)$ , где  $k \in \mathbb{R}$ . Функция  $X(k)$  аналитична в нижней полуплоскости, мероморфна в верхней и имеет там полюса в точках  $k = i\kappa_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Введем

$$\gamma_n(x) = -ie^{\kappa_n x} \operatorname{res}_{k=i\kappa_n} X(x, k), \quad (7.3)$$

что по (2.19) и (7.2) дает

$$\gamma_n(x) = \frac{\chi_+(x, i\kappa_n)e^{\kappa_n x}}{ia'(i\kappa_n)} \equiv \frac{\varphi_+(x, i\kappa_n)}{ia'(i\kappa_n)}. \quad (7.4)$$

На вещественной оси эта функция, как следует из (7.1), имеет разрыв:

$$X_+(x, k) - X_-(x, k) = r(k)\bar{X}_-(x, k)e^{2ikx}, \quad \text{Im}k = 0. \quad (7.5)$$

Чтобы удалить полюсные особенности, рассмотрим

$$\tilde{X}(x, k) = X(x, k) - i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x)e^{-\kappa_n x}}{k - i\kappa_n}. \quad (7.6)$$



Эта функция аналитична в верхней и нижней полуплоскостях и имеет тот же разрыв на вещественной оси, что и (7.5):

$$\tilde{X}_+(x, k) - \tilde{X}_-(x, k) = r(k)\bar{X}_-(x, k)e^{2ikx}, \quad \text{Im}k = 0. \quad (7.7)$$

Кроме того в силу (3.4), (3.17) и (7.1) выполнено асимптотическое поведение

$$\tilde{X}(x, k) \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty. \quad (7.8)$$

Тогда по формуле Лиувилля

$$\tilde{X}(x, k) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{\tilde{X}_+(x, k') - \tilde{X}_-(x, k')}{k' - k}, \quad (7.9)$$

так что по (7.6)

$$\begin{aligned} X(x, k) = 1 + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x)e^{-\kappa_n x}}{k - i\kappa_n} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k')\bar{X}_-(x, k')e^{2ik'x}}{k' - k}, \quad \text{Im}k \neq 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Переходя к пределам на вещественной оси, получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\chi_+(x, k)}{a(k)} = 1 + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x)e^{-\kappa_n x}}{k - i\kappa_n} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k')\bar{X}_-(x, k')e^{2ik'x}}{k' - k - i0}, \quad \text{Im}k = 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

и

$$\begin{aligned} \chi_-(x, k) = 1 + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x)e^{-\kappa_n x}}{k - i\kappa_n} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k')\bar{X}_-(x, k')e^{2ik'x}}{k' - k + i0}, \quad \text{Im}k = 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Перейдем к решениям Ёоста. Вместо (7.11) мы имеем при  $\text{Im}k = 0$

$$\frac{\varphi_+(x, k)}{a(k)} = e^{-ikx} + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x)e^{i(\kappa_n - k)x}}{k - i\kappa_n} + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k')e^{i(k' - k)x}\bar{\varphi}_-(x, k')}{k' - k - i0}, \quad (7.13)$$

а вместо (7.12)

$$\varphi_-(x, k) = e^{-ikx} + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x) e^{-i(k-i\kappa_n)x}}{k - i\kappa_n} + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k') e^{i(k'-k)x} \overline{\varphi_-(x, k')}}{k' - k + i0}. \quad (7.14)$$

Первое из них определяет  $\varphi_+(x, k)$ , если известны  $\varphi_-(x, k)$  и  $\gamma_n(x)$ . Для того, чтобы второе равенство превратилось в интегральное уравнение на  $\varphi_-(x, k)$ , воспользуемся (7.4), которое в силу (6.16) и (5.11) дается в виде

$$\gamma_n(x) = \beta_n \varphi_-(x, -i\kappa_n). \quad (7.15)$$

Иными словами мы связали вычеты в полюсах функции  $X$  в верхней полуплоскости с ее значениями в нижней. Продолжая (7.14) в нижнюю полуплоскость, мы получаем по (7.15)

$$\gamma_n(x) = \beta_n \left\{ e^{-\kappa_n x} - \sum_{m=1}^N \frac{\gamma_m(x) e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x}}{\kappa_n + \kappa_m} + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k') e^{i(k'+i\kappa_n)x} \overline{\varphi_-(x, k')}}{k' + i\kappa_n} \right\}, \quad (7.16)$$

что вместе с (7.14) дает уже замкнутую систему **уравнений обратной задачи** для функции  $\varphi_-(x, k)$ . Можно доказать однозначную разрешимость этих уравнений в выбранном классе спектральных данных. Тогда потенциал  $u(x)$  восстанавливается по (3.4):

$$u(x) = \partial_x \left\{ 2 \sum_{n=1}^N \gamma_n(x) e^{-\kappa_n x} + \frac{1}{\pi} \int dk' r(k') e^{ik'x} \overline{\varphi_-(x, k')} \right\}. \quad (7.17)$$

## 7.2 Временная эволюция.

Итак, мы разобрали прямую задачу (левая стрелка вниз на диаграмме 2.2). Теперь, наконец, нам предстоит разобрать временную эволюцию данных рассеяния (нижняя горизонтальная стрелка на диаграмме 2.2), эквивалентную тому, что  $u(x)$  зависит от  $t$  в силу уравнения (1.1). Последнее, как мы видели, эквивалентно выполнению представления Лакса (1.11), где оператор  $M$  определен в (1.13). Тогда, ввиду (2.9) и асимптотических условий (2.15) и (2.16), получаем:

$$\varphi_{+,t}(x, k) + \mathcal{A} \varphi_+(x, k) = 4ik^3 \varphi_+(x, k), \quad (7.18)$$

$$\varphi_{-,t}(x, k) + \mathcal{A} \varphi_-(x, k) = 4ik^3 \varphi_-(x, k), \quad (7.19)$$

где  $k \in \mathbb{R}$ , но оба равенства допускают продолжения в соответствующие полуплоскости спектрального параметра. Далее, по (3.12), (7.18) и (7.19) находим, что

$$a_t(k) \varphi_-(x, k) + b_t(k) \overline{\varphi}_-(x, k) = 8ik^3 b(k) \overline{\varphi}_-(x, k), \quad k \in \mathbb{R},$$

что ввиду линейной независимости  $\varphi_-(x, k)$  и  $\overline{\varphi}_-(x, k)$  при  $k \neq 0$  дает эволюцию элементов матрицы монодромии:

$$a_t(k) = 0, \quad (7.20)$$

$$b_t(k) = 8ik^3 b(k) \quad (7.21)$$

при  $k \in \mathbb{R}$ . Однако, ввиду того, что  $a(k)$  допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость  $k$ , равенство (7.20) выполняется также и при всех  $k \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}k \geq 0$ . Таким образом функция  $a(k)$  есть порождающий функционал интегралов движения, которыми будут, например, все коэффициенты ее ряда Тейлора, или значения в различных точках этой полуплоскости. В частности, не зависят от времени и положения нулей этой функции, т.е.

$$\partial_t \kappa_n = 0. \quad (7.22)$$

Далее, из (5.11) и аналитических продолжений равенств (7.18) и (7.19) в соответствующие полуплоскости, следует, что

$$\partial_t b_n = 8\kappa_n^3 b_n. \quad (7.23)$$

Суммируя, для временной эволюции спектральных данных получаем:

$$r_t(k) = 8ik^3 r(k) \quad (7.24)$$

и

$$\partial_t \beta_n = 8\kappa_n^3 \beta_n. \quad (7.25)$$

Итак, при  $t$  отличном от нуля спектральные данные суть

$$S(t) = \left\{ e^{8ik^3 t} r(k), \quad \kappa_n, \quad e^{8\kappa_n^3 t} \beta_n \right\}. \quad (7.26)$$

Отметим, что в силу (7.24) и (7.22):

$$\partial_t |r(k)| = 0, \quad (7.27)$$

откуда следует (7.20) в силу (6.5).

Подставляя данные рассеяния (7.26) в уравнения обратной задачи, мы находим решение Йоста  $\varphi_-(t, x, k)$ , отвечающее моменту  $t$  и, очевидно, совпадающее с исходным  $\varphi_-(x, k)$  при  $t = 0$ . Так построенное решение Йоста удовлетворяет уравнению (7.19), однако проверка этого факта достаточно громоздка и мы ее здесь опускаем. А отсюда уже следует, что потенциал  $u(t, x)$ , восстановленный по (7.17), решает задачу Коши для уравнения КдФ. Итак, мы замкнули диаграмму 2.2, сведя решение нелинейной задачи к последовательному решению трех линейных задач, одна из которых решается явно. В этом и состоит общая схема метода обратной задачи рассеяния.

**Задача 12** *Имеем систему уравнений (7.14) и (7.15). Рассмотреть предел этой системы при  $\kappa_{l+1} = \kappa_l$  для некоторого  $l \in [1, N - 1]$ . Показать, что в этом пределе данная система сводится к такой же системе с заменой  $N \rightarrow N - 1$ , т.е., что вырождения собственного значения при  $k = i\kappa_l$  не возникает.*

## 8 Лекция.

### 8.1 Вывод уравнения Штурма–Лиувилля из уравнений обратной задачи.

Мы показали, что решение Йоста  $\varphi_-(x, k)$  уравнения Штурма–Лиувилля удовлетворяет системе уравнений (7.14) и (7.16). Докажем теперь обратное утверждение: решение  $\varphi_-(x, k)$  уравнений (7.14) и (7.16) удовлетворяет уравнению Штурма–Лиувилля с потенциалом, заданным по (7.17). Для этого продифференцируем указанные уравнения:

$$\begin{aligned}
 (\partial_x^2 + k^2) \varphi_-(x, k) &= \\
 &= i \sum_n e^{-i(k-i\kappa_n)x} \left\{ \frac{(\partial_x^2 - \kappa_n^2) \gamma_n(x)}{k - i\kappa_n} - 2i \partial_x \gamma_n(x) + 2i \kappa_n \gamma_n(x) \right\} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \int dk' r(k') e^{i(k'-k)x} \left\{ \frac{(\partial_x^2 + k'^2) \overline{\varphi}_-(x, k')}{k' - k + i0} + \right. \\
 &\left. + 2i \partial_x \overline{\varphi}_-(x, k') - 2k' \overline{\varphi}_-(x, k') \right\}, \\
 (\partial_x^2 - \kappa_n^2) \gamma_n(x) &= \\
 &- \beta_n \sum_m e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x} \left\{ \frac{(\partial_x^2 - \kappa_m^2) \gamma_m(x)}{\kappa_n + \kappa_m} - 2 \partial_x \gamma_m(x) + 2 \kappa_m \gamma_m(x) \right\} + \\
 &+ \frac{\beta_n}{2\pi i} \int dk' r(k') e^{i(k'+i\kappa_n)x} \left\{ \frac{(\partial_x^2 + k'^2) \overline{\varphi}_-(x, k')}{k' + i\kappa_n} + \right. \\
 &\left. + 2i \partial_x \overline{\varphi}_-(x, k') - 2k' \overline{\varphi}_-(x, k') \right\},
 \end{aligned}$$

что в силу (7.17) можно переписать как

$$\begin{aligned}
(\partial_x^2 + k^2) \varphi_-(x, k) &= e^{-ikx} u(x) + i \sum_n e^{-i(k-i\kappa_n)x} \frac{(\partial_x^2 - \kappa_n^2) \gamma_n(x)}{k - i\kappa_n} + \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int dk' r(k') e^{i(k'-k)x} \frac{(\partial_x^2 + k'^2) \overline{\varphi}_-(x, k')}{k' - k + i0}, \\
(\partial_x^2 - \kappa_n^2) \gamma_n(x) &= \beta_n \left\{ e^{-\kappa_n x} u(x) - \sum_m e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x} \frac{(\partial_x^2 - \kappa_m^2) \gamma_m(x)}{\kappa_n + \kappa_m} + \right. \\
&\left. + \frac{1}{2\pi i} \int dk' r(k') e^{i(k'+i\kappa_n)x} \frac{(\partial_x^2 + k'^2) \overline{\varphi}_-(x, k')}{k' + i\kappa_n} \right\}.
\end{aligned}$$

Итак мы видим, что функции  $(\partial_x^2 + k^2) \varphi_-(x, k)$  и  $(\partial_x^2 - \kappa_n^2) \gamma_n(x)$  удовлетворяют уравнениям с тем же ядрами, что и функции  $\varphi_-(x, k)$  и  $\gamma_n(x)$ , т.е. (7.14) и (7.16), но с неоднородными членами умноженными на  $u(x)$ . В силу однозначной разрешимости системы (7.14), (7.16), а также учитывая, что переменная  $x$  входит в ядра этой системы как параметр, получаем:

$$(\partial_x^2 + k^2) \varphi_-(x, k) = u(x) \varphi_-(x, k), \quad (\partial_x^2 - \kappa_n^2) \gamma_n(x) = u(x) \gamma_n(x). \quad (8.1)$$

Отметим, что равенство  $(\partial_x^2 + k^2) \varphi_+(x, k) = u(x) \varphi_+(x, k)$  можно вывести аналогично, либо с помощью (7.13).

## 8.2 Солитонные решения: $r \equiv 0$ .

В этом случае (7.14) сводится к

$$\varphi_-(x, k) = e^{-ikx} + i \sum_n \frac{e^{i(\kappa_n - k)x} \gamma_n(x)}{k - i\kappa_n}, \quad (8.2)$$

а (7.17) — к

$$u(x) = 2\partial_x \sum_n e^{-\kappa_n x} \gamma_n(x). \quad (8.3)$$

Таким образом, уравнения обратной задачи в данном частном случае сводятся к системе **алгебраических** уравнений на функции  $\gamma_n$ . Действительно, вводя  $N \times N$  матрицу

$$A_{n,m} = \delta_{n,m} + \frac{e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x} \beta_n}{\kappa_n + \kappa_m}, \quad (8.4)$$

мы записываем (7.16) в виде

$$\sum_{m=1}^N A_{n,m} \gamma_m = \beta_n e^{-\kappa_n x}.$$

Отсюда

$$\gamma_n = \frac{\det A^{(n)}}{\det A}, \quad (8.5)$$

а матрица  $A^{(n)}$  получается из  $A$  заменой  $n$ -го столбца на столбец  $\beta_n e^{-\kappa_n x}$ . Подставляя (8.5) в (8.3), заметим что по правилу дифференцирования детерминантов:

$$\sum_n e^{-\kappa_n x} \det A^{(n)} = -\partial_x \det A,$$

так что окончательно для  $N$  солитонного решения получаем

$$u(x) = -2\partial_x^2 \ln \det A. \quad (8.6)$$

Поскольку в выражение (8.6) для потенциала входит только детерминант матрицы  $A$ , мы можем преобразовывать эту матрицу. Введем

$$\beta_n = 2\kappa_n e^{2\kappa_n q_n}. \quad (8.7)$$

Тогда по (8.4):

$$\begin{aligned} \det A &= \det \left[ \delta_{n,m} + \frac{2\kappa_n}{\kappa_n + \kappa_m} e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x + 8\kappa_n^3 t + 2\kappa_n q_n} \right] = \\ &= \det \left[ \text{diag} \left( \sqrt{\kappa_n} e^{4\kappa_n^3 t + \kappa_n q_n} \right) \right] \times \\ &\quad \times \det \left( \delta_{n,m} + \frac{2\sqrt{\kappa_n \kappa_m}}{\kappa_n + \kappa_m} e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x + 4(\kappa_n^3 + \kappa_m^3)t + (\kappa_n + \kappa_m)q_n} \right) \times \\ &\quad \times \det \left[ \text{diag} \left( \sqrt{\kappa_m^{-1}} e^{-4\kappa_m^3 t - \kappa_m q_m} \right) \right]. \end{aligned}$$

Первый и последний сомножители сокращают друг друга, так что

$$\det A = \det \left( \delta_{n,m} + \frac{2\sqrt{\kappa_n \kappa_m}}{\kappa_n + \kappa_m} e^{-\theta_n - \theta_m} \right),$$

где

$$\theta_n(t, x) = \kappa_n(x - q_n) - 4\kappa_n^3 t. \quad (8.8)$$

Более того, поскольку в (8.6) входит лишь вторая производная логарифма детерминанта матрицы  $A$ , то понятно, что преобразования матрицы, которые ведут к умножению ее на постоянную по  $x$ , или на линейную по  $x$  экспоненту не приводят к изменению потенциала. Будем обозначать преобразования матрицы  $A$ , которые сохраняют потенциал  $u(x)$  знаком  $\cong$ . В частности, как легко видеть

$$A \cong \left\| \delta_{m,n} + \frac{2\kappa_n}{\kappa_m + \kappa_n} e^{-2\theta_n} \right\|. \quad (8.9)$$

Рассмотрим свойства введенных солитонных решений.

### 8.3 Односолитонное решение, $N = 1$ .

В этом простейшем случае

$$\begin{aligned} \det A \equiv A &= 1 + \frac{\beta}{2\kappa} e^{-2\kappa(x-4\kappa^2t)} = 1 + e^{-2\kappa(x-4\kappa^2t-q)} = \\ &= 2e^{-\kappa(x-4\kappa^2t-q)} \operatorname{ch} \kappa(x - 4\kappa^2t - q), \end{aligned}$$

где мы использовали (8.7). Поэтому

$$\gamma = \frac{\beta e^{-\kappa x + 8\kappa^3 t}}{A} = \kappa e^{\kappa x} (1 - \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2t - q))$$

$$\begin{aligned} \varphi_-(x, k) &= e^{-ikx} \left( 1 + \frac{i\kappa}{k - i\kappa} (1 - \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2t - q)) \right) = \\ &= \frac{e^{-ikx}}{k - i\kappa} (k - i\kappa \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2t - q)) \end{aligned}$$

В данном случае  $a(k) = \frac{k-i\kappa}{k+i\kappa}$ ,  $a'(i\kappa) = \frac{1}{2i\kappa}$ ,  $b(k) \equiv 0$ , но  $b_1 = e^{2\kappa q} \neq 0$ , что наглядно демонстрирует, что  $b_1 \neq b(i\kappa)$ . Далее по (7.13)

$$\varphi_+(x, k) = \frac{e^{-ikx}}{k + i\kappa} (k - i\kappa \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2t - q)).$$

Тогда

$$u(t, x) = -\frac{2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa(x - 4\kappa^2t - q)}.$$



Кроме того, мы имеем:

$$\chi_+(x, k) = \frac{k - i\kappa \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2 t - q)}{k + i\kappa}$$

и

$$\varphi_+(x, i\kappa) = \frac{e^{4\kappa^3 t + \kappa q}}{2 \operatorname{ch} \kappa x}.$$

## 9 Лекция.

### 9.1 Двусолитонное решение, $N = 2$ .

В данном случае

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 + e^{-2\kappa_1(x-q_1-4\kappa_1^2t)} & \frac{2\kappa_1}{\kappa_1+\kappa_2} e^{-(\kappa_1+\kappa_2)x+8\kappa_1^3t+2\kappa_1q_1} \\ \frac{2\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2} e^{-(\kappa_1+\kappa_2)x+8\kappa_2^3t+2\kappa_2q_2} & 1 + e^{-2\kappa_2(x-q_2-4\kappa_2^2t)} \end{vmatrix},$$

так что

$$\begin{aligned} \det A &= 1 + e^{-2\kappa_1(x-q_1-4\kappa_1^2t)} + e^{-2\kappa_2(x-q_2-4\kappa_2^2t)} + \\ &+ \left( \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \right)^2 e^{-2\kappa_1(x-q_1-4\kappa_1^2t)-2\kappa_2(x-q_2-4\kappa_2^2t)}. \end{aligned}$$

Введем

$$\xi_n = \kappa_n(x - q_n) - 4\kappa_n^3t + \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \ln \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}, \quad (9.1)$$

где по определению  $\varphi > 0$ . Тогда

$$\det A = \frac{2e^{-\xi_1-\xi_2}}{\kappa_1 + \kappa_2} \left[ (\kappa_1 - \kappa_2) \operatorname{ch}(\xi_1 + \xi_2) + (\kappa_1 + \kappa_2) \operatorname{ch}(\xi_1 - \xi_2) \right]$$

и решение может быть записано в одной из следующих форм:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= -2\partial_x^2 \ln \left( (\kappa_1 - \kappa_2) \operatorname{ch}(\xi_1 + \xi_2) + (\kappa_1 + \kappa_2) \operatorname{ch}(\xi_1 - \xi_2) \right) = \\ &= -2\partial_x^2 \ln (\kappa_1 \operatorname{ch} \xi_1 \operatorname{ch} \xi_2 - \kappa_2 \operatorname{sh} \xi_1 \operatorname{sh} \xi_2) = \\ &= -2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \frac{\kappa_1^2 \operatorname{ch}^2 \xi_2 + \kappa_2^2 \operatorname{sh}^2 \xi_1}{(\kappa_1 \operatorname{ch} \xi_1 \operatorname{ch} \xi_2 - \kappa_2 \operatorname{sh} \xi_1 \operatorname{sh} \xi_2)^2}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Рассмотрим асимптотики этого решения на временной бесконечности. Для этого перепишем (9.2) в виде

$$u(t, x) = -2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \frac{\frac{\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2 \xi_1} + \frac{\kappa_2^2 \operatorname{th}^2 \xi_1}{\operatorname{ch}^2 \xi_2}}{(\kappa_1 - \kappa_2 \operatorname{th} \xi_1 \operatorname{th} \xi_2)^2}.$$

Очевидно, что  $u(t, x) \rightarrow 0$ , если  $t \rightarrow \infty$  так, что обе величины  $\xi_1$  и  $\xi_2 \rightarrow \infty$ . Рассмотрим поэтому случай, когда  $t \rightarrow \infty$  так что либо  $\xi_1$ , либо  $\xi_2$  конечны. По определению

$$\xi_2 = 4\kappa_2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)t + \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\xi_1 + \kappa_2(q_1 - q_2) + \frac{\varphi}{2\kappa_1}(\kappa_1 - \kappa_2).$$

Итак,

если  $\xi_1$  конечна, то  $\xi_2 \rightarrow \pm\infty$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ ;

если  $\xi_2$  конечна, то  $\xi_1 \rightarrow \mp\infty$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

таким образом, если  $\xi_1$  конечна при  $t \rightarrow \pm\infty$ , то

$$u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_1^2}{\left(\frac{\kappa_1 \operatorname{ch} \xi_1}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} \mp \frac{\kappa_2 \operatorname{sh} \xi_1}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}}\right)^2}.$$

По (9.1)

$$\frac{\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} = \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2}, \quad \frac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} = \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2},$$

и окончательно

$$\text{если } \xi_1 \text{ ограничена и } t \rightarrow \pm\infty, \text{ то } u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2(\xi_1 \mp \frac{\varphi}{2})}.$$

Аналогично получаем, что

$$\text{если } \xi_2 \text{ ограничена и } t \rightarrow \pm\infty, \text{ то } u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_2^2}{\operatorname{ch}^2(\xi_2 \pm \frac{\varphi}{2})}.$$

Суммируя, мы видим, что независимо от способа стремления

$$\text{при } t \rightarrow -\infty : u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2(\xi_1 + \frac{\varphi}{2})} - \frac{2\kappa_2^2}{\operatorname{ch}^2(\xi_2 - \frac{\varphi}{2})},$$

$$\text{при } t \rightarrow +\infty : u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2(\xi_1 - \frac{\varphi}{2})} - \frac{2\kappa_2^2}{\operatorname{ch}^2(\xi_2 + \frac{\varphi}{2})}.$$

Действительно, если  $x$  и  $t$  стремятся к бесконечности так, что одна из  $\xi_n$  ограничена, то слагаемое в правой части, зависящее от другой  $\xi$  стремится к нулю, что дает полученный выше результат. Если же обе  $\xi_n$  стремятся к бесконечности, то мы имеем ноль слева и ноль справа. Полученная асимптотика с очевидностью демонстрирует, что солитоны сохраняют при взаимодействии свою форму и приобретают сдвиги фаз – изменения знака  $\varphi$ . Точно также ведут себя солитонные решения и в общем,  $N$ -солитонном случае.

## 9.2 Асимптотика по $t$ $N$ -солитонных решений

В дальнейшем нам потребуется детерминант

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \det \left\| \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \right\|_{m,n=1}^l. \quad (9.3)$$

Покажем, что для него имеется явная формула:

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \prod_{i=1}^l \frac{1}{2\kappa_i} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l \frac{|\kappa_i - \kappa_j|}{\kappa_i + \kappa_j}. \quad (9.4)$$

Доказательство проводится по индукции. Очевидно, что при  $l = 1$  (9.3) дает  $D(\kappa_1) = (2\kappa_1)^{-1}$ , что совпадает с (9.4). Далее, для детерминанта (9.3) выполняется рекуррентная формула

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \frac{D(\kappa_1, \dots, \kappa_{l-1})}{2\kappa_l} \prod_{j=1}^{l-1} \left( \frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \right)^2. \quad (9.5)$$

Чтобы доказать ее заметим, что

$$\begin{aligned} D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) &= \prod_{j=1}^l \frac{1}{\kappa_l + \kappa_j} \det \left\| \frac{\kappa_m + \kappa_l}{\kappa_m + \kappa_n} \right\|_{m,n=1}^l = \\ &= \prod_{j=1}^l \frac{1}{\kappa_l + \kappa_j} \det \left\| 1 + \frac{\kappa_l - \kappa_n}{\kappa_m + \kappa_n} \right\|_{m,n=1}^l, \end{aligned}$$

т.е. в последнем столбце ( $n = l$ ) стоят только единицы. Вычитая последний столбец из всех предыдущих и вынося множители  $\kappa_l - \kappa_n$  из всех столбцов с  $n \leq l - 1$ , получаем

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \frac{1}{2\kappa_l} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \det \begin{pmatrix} \left\| \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \right\|_{m,n=1}^{l-1} & \mathbf{1} \\ \frac{1}{\kappa_l + \kappa_n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычтем теперь последнюю строку из всех предыдущих:

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \frac{1}{2\kappa_l} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \det \begin{pmatrix} \left\| \frac{\kappa_l - \kappa_m}{(\kappa_m + \kappa_n)(\kappa_l + \kappa_n)} \right\|_{m,n=1}^{l-1} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\kappa_l + \kappa_n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Вынося теперь  $\kappa_l - \kappa_m$  из всех строк и  $(\kappa_l + \kappa_n)^{-1}$  из всех столбцов мы получаем (9.5), что по индукции доказывает (9.4).

Теперь мы готовы исследовать асимптотику правой части (8.9), где  $\theta_n$  определены в (8.8). Когда обе переменные  $x$  и  $t$  стремятся к бесконечности в общем направлении, то и все  $\theta_n$  стремятся к  $+\infty$  или  $-\infty$ . Переупорядочим нумерацию так, чтобы в заданном направлении

$$\begin{aligned}\theta_n &\rightarrow +\infty, & n = 1, \dots, l \\ \theta_n &\rightarrow -\infty, & n = l + 1, \dots, N,\end{aligned}$$

при этом мы полагаем, что если все  $\theta_n \rightarrow -\infty$ , то  $l = 0$ , а если все  $\theta_n \rightarrow +\infty$ , то  $l = N$ . Тогда, пользуясь свободой переопределения матрицы  $A$ , указанной при выводе равенства (8.9), имеем:

$$\det A \cong \det \left\| \delta_{m,n} + \frac{2\kappa_n e^{-2\theta_n}}{\kappa_m + \kappa_n} \left| \delta_{m,n} e^{2\theta_n} + \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \right. \right\|, \quad \begin{array}{l} n \leq l \\ n \geq l+1 \end{array}$$

Левая часть матрицы стремится к единичной матрице, а правая часть стремится к матрице типа введенной в (9.3), поэтому все это выражение стремится к  $D(\kappa_{l+1}, \dots, \kappa_N)$ . По (9.4) эта величина отлична от нуля, поэтому по (8.6) и  $u(t, x) \rightarrow 0$  в общем направлении. Рассмотрим теперь случай, когда  $x$  и  $t$  стремятся к нулю так, что некоторое  $\theta_l$  фиксировано. Это означает, что

$$x = c + 4\kappa_l^2 t,$$

где  $c$  – некоторая константа.

$$\theta_n \Big|_{x=c+4\kappa_l^2 t} = \kappa_n(c - q_n) + 4\kappa_n(\kappa_l^2 - \kappa_n^2)t$$

и мы рассматриваем предел  $t \rightarrow \pm\infty$ . При этом далее мы, как обычно, будем полагать, что нумерация выбрана так, что  $\kappa_1 > \dots > \kappa_N$ . Тогда

$$\begin{aligned}\theta_n \Big|_{x=c+4\kappa_l^2 t} &= \begin{cases} -\infty, & n < l \\ +\infty & n > l \end{cases}, & t \rightarrow +\infty, \\ \theta_n \Big|_{x=c+4\kappa_l^2 t} &= \begin{cases} +\infty, & n < l \\ -\infty & n > l \end{cases}, & t \rightarrow -\infty,\end{aligned}$$

Запишем теперь интересующий нас детерминант в виде

$$\det A \cong \det \left\| \frac{\delta_{m,n}}{2\kappa_n} e^{2\theta_n} + \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \left| \delta_{m,n} + \frac{2\kappa_n e^{-2\theta_n}}{\kappa_m + \kappa_n} \right. \right\|, \quad \begin{array}{l} n \leq l \\ n \geq l+1 \end{array}$$

Пусть  $t \rightarrow +\infty$ . В пределе в столбцах с  $(l+1)$ -го по  $N$ -ый стоит единичная матрица. Разлагая детерминант последовательно по всем этим столбцам, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \theta_l = \text{const}}} \det A &\cong \left| \begin{array}{cc} n \leq l-1 & n=l \\ \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} & \frac{2\kappa_l e^{-2\theta_l}}{\kappa_m + \kappa_l} \\ \frac{1}{\kappa_l + \kappa_n} & 1 + e^{-2\theta_l} \end{array} \right| = \\ &= D(\kappa_1, \dots, \kappa_{l-1}) + 2\kappa_l e^{-2\theta_l} D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) \cong \\ &\cong 1 + e^{-2\theta_l} \prod_{j=1}^{l-1} \left( \frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, независимо от способа стремления на бесконечность, мы имеем, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \det A \cong \prod_{l=1}^N \left[ 1 + e^{-2\theta_l} \prod_{j=1}^{l-1} \left( \frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \right)^2 \right],$$

причем легко показать, что поправочные члены убывают экспоненциально.

Рассмотрим аналогично предел  $t \rightarrow -\infty$  при условии, что  $\theta_l = \text{const}$ . Тогда

$$\det A \cong \det \left\| \delta_{m,n} + \frac{2\kappa_n e^{-2\theta_n}}{\kappa_m + \kappa_n} \left| \frac{\delta_{m,n}}{2\kappa_n} e^{2\theta_n} + \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \right. \right\|.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ \theta_l = \text{const}}} \det A &\cong \left| \begin{array}{cc} n=l & n>l \\ 1 + \frac{2\kappa_l e^{-2\theta_l}}{\kappa_m + \kappa_l} & \frac{1}{\kappa_l + \kappa_n} \\ \frac{2\kappa_l e^{-2\theta_l}}{\kappa_l + \kappa_n} & \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \end{array} \right| \cong \\ &\cong D(\kappa_{l+1}, \dots, \kappa_N) + 2\kappa_l e^{-2\theta_l} D(\kappa_l, \dots, \kappa_N). \end{aligned}$$

По аналогии с (9.5) можно показать, что

$$D(\kappa_l, \dots, \kappa_N) = \frac{D(\kappa_{l+1}, \dots, \kappa_N)}{2\kappa_l} \prod_{j=l+1}^N \left( \frac{\kappa_i - \kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} \right)^2, \quad (9.6)$$

так что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \det A(t, x) \cong \prod_{l=1}^N \left[ 1 + e^{-2\theta_l} \prod_{j=l+1}^N \left( \frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \right)^2 \right].$$

Итак, по (8.6) мы окончательно получаем, что

$$u(t, x) = - \sum_{l=1}^N \frac{2\kappa_l^2}{\text{ch}^2(\theta_l - \varphi_l^\pm)}, \quad t \rightarrow \pm\infty, \quad (9.7)$$

где

$$\varphi_l^+ = \sum_{j=1}^{l-1} \ln \frac{|\kappa_l - \kappa_j|}{\kappa_l + \kappa_j} < 0, \quad \varphi_l^- = \sum_{j=l+1}^N \ln \frac{|\kappa_l - \kappa_j|}{\kappa_l + \kappa_j} < 0.$$

Полученный результат доказывает два замечательных свойства солитонных решений. Во-первых, каждое такое решение на обоих асимптотиках стремится к сумме односолитонных решений. Во-вторых, рассеяние солитонов упруго: оно сводится лишь к изменению фаз солитонов, причем

$$\varphi_l^+ - \varphi_l^- = \sum_{j=1}^{l-1} \ln \frac{|\kappa_l - \kappa_j|}{\kappa_l + \kappa_j} - \sum_{j=l+1}^N \ln \frac{|\kappa_l - \kappa_j|}{\kappa_l + \kappa_j}.$$

В частности,

$$\varphi_1^+ - \varphi_1^- = \sum_{j=2}^N \ln \frac{\kappa_1 + \kappa_j}{\kappa_1 - \kappa_j},$$

и

$$\varphi_2^+ - \varphi_2^- = \sum_{j=3}^N \ln \frac{\kappa_2 + \kappa_j}{\kappa_2 - \kappa_j} - \ln \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}.$$

На самом деле, легко показать, что оба указанных свойства, равно как и формулы для фаз имеют место и для общих решений, т.е. решений с ненулевым коэффициентом отражения. Иными словами, непрерывный спектр не дает вклада в рассеяние солитонов.

### 9.3 Интегралы движения.

Локальными полиномиальными интегралами движения называются выражения вида

$$I_n = \int P_n(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_x^{(m)}) dx, \quad (9.8)$$

где  $P_n$  – полином  $n$ -ой степени от своих аргументов. Покажем, что уравнение КдФ обладает бесконечным набором таких, функционально независимых, интегралов. Поражающим функционалом таких интегралов является функция

$a(k)$ , которая, как было показано, не зависит от времени. В окрестности особенности по  $k$  спектральной задачи, т.е. на бесконечности в данном случае, коэффициенты ее асимптотического разложения могут быть вычислены. Для демонстрации этого, выберем  $k$  в верхней полуплоскости и достаточно большим: таким, что  $\varphi_+(x, k)$  не обращается в нуль (ввиду асимптотических свойств решения Йоста такое всегда возможно). Введем вместо  $\varphi_+(x, k)$  новую функцию  $\zeta(x, k)$  равенством

$$\varphi_+(x, k) = \exp \left\{ -ikx + \int_{-\infty}^x dx' \zeta(x', k) \right\}, \quad \text{Im}k > 0. \quad (9.9)$$

В силу условия на  $k$  правая часть не имеет нулей, а потому  $\zeta$  хорошо определена и не имеет особенностей в указанной области. В силу (3.18) имеем

$$\ln a(k) = \int dx \zeta(x, k), \quad (9.10)$$

а по (2.8) эта функция удовлетворяет уравнению Рикатти:

$$\zeta_x + \zeta^2 - u - 2ik\zeta = 0. \quad (9.11)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде асимптотического ряда при  $k \rightarrow \infty$

$$\zeta(x, k) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\zeta_j(x)}{(2ik)^j}, \quad k \in \mathbb{C}, \quad \text{Im}k > 0. \quad (9.12)$$

Легко видеть, что

$$\zeta_1(x) = -u(t, x), \quad (9.13)$$

и приравнивая коэффициенты при старших степенях, получаем рекуррентные соотношения:

$$\zeta_{j+1}(x) = \partial_x \zeta_j(x) + \sum_{k=1}^{j-1} \zeta_k(x) \zeta_{j-k}(x), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (9.14)$$

что показывает, что все коэффициенты  $\zeta_j(x)$ , последовательно определяемые по (9.14), действительно являются полиномами, локальными по  $u$  и ее производным. Для младших коэффициентов мы имеем:

$$\zeta_2(x) = -u_x, \quad \zeta_3(x) = -u_{xx} + u^2, \quad (9.15)$$

$$\zeta_4(x) = -u_{xxx} + 2\partial_x u^2, \quad (9.16)$$

$$\zeta_5(x) = -u_x^{(4)} + \partial_x^2 u^2 + u_x^2 + 2u_{xx}u - 2u^3, \quad (9.17)$$



Мы видим, что  $\zeta_2(x)$  и  $\zeta_4(x)$  – полные производные локальных выражений, а потому дают нули при интегрировании по всей оси. Покажем, что это справедливо для всех четных коэффициентов  $\zeta_{2j}(x)$ . Для этого запишем

$$\zeta(x, k) = \zeta_{\text{Re}}(x, k) + i\zeta_{\text{Im}}(x, k), \quad (9.18)$$

где обозначено

$$\zeta_{\text{Re}}(x, k) = \frac{\zeta(x, k) + \overline{\zeta(x, \bar{k})}}{2}, \quad \zeta_{\text{Im}}(x, k) = \frac{\zeta(x, k) - \overline{\zeta(x, \bar{k})}}{2i}, \quad (9.19)$$

т.е. мы сопрягаем только коэффициенты асимптотического ряда (9.12). Тогда в силу (9.11)

$$\partial_x \zeta_{\text{Im}} + 2\zeta_{\text{Re}} \zeta_{\text{Im}} - 2k\zeta_{\text{Re}} = 0. \quad (9.20)$$

Ввиду условия на  $k$  это равенство можно записать как

$$\zeta_{\text{Re}}(x, k) = -\frac{1}{2} \partial_x \ln(\zeta_{\text{Im}}(x, k) - k), \quad (9.21)$$

что доказывает, что  $\zeta_{\text{Re}}(x, k)$ , а значит и все четные коэффициенты ряда (9.12) суть полные производные локальных функций. Для  $\zeta_{\text{Re}}(x, k)$  аналогичного свойства нет, а потому мы вводим интегралы движения посредством равенств

$$I_{j-1} = \frac{1}{2} \int dx \zeta_{2j+1}(x), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (9.22)$$

В силу (9.13), (9.15), (9.16) и (9.17) для младших интегралов имеем явно:

$$I_{-1} = \frac{-1}{2} \int dx u(t, x), \quad I_0 = \frac{1}{2} \int dx u^2(t, x), \quad (9.23)$$

$$I_1 = \frac{-1}{2} \int dx (u_x^2 + 2u^3), \quad (9.24)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int dx (u_{xx}^2 - 5u^2 u_{xx} + 5u^4). \quad (9.25)$$

Итак, мы доказали в силу (9.9), (9.10) и (9.12), что выполнено асимптотическое разложение

$$\ln a(k) = \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{2I_j}{(2ik)^{2j+3}}. \quad (9.26)$$

С другой стороны, в силу (6.6)

$$\ln a(k) = \sum_{n=1}^N \ln \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} + \frac{i}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k' - k}, \quad \text{Im}k > 0, \quad (9.27)$$

так что полагая, что  $r(k) \in \mathcal{S}$ , а также используя равенство  $|r(-k)| = |r(k)|$ , мы получаем явное выражение интегралов движения через данные рассеяния:

$$\ln a(k) = \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{i}{k^{2j+3}} \left\{ \frac{2(-1)^j}{2j+3} \sum_{n=1}^N \kappa_n^{2j+3} - \frac{1}{\pi} \int dk k^{2(j+1)} \ln(1 - |r(k)|^2) \right\}, \quad (9.28)$$

что по (9.26) дает

$$I_j = \frac{2^{2j+3}(-1)^j}{2j+3} \sum_{n=1}^N \kappa_n^{2j+3} + (-1)^j \frac{2^{2(j+1)}}{\pi} \int dk k^{2(j+1)} \ln(1 - |r(k)|^2). \quad (9.29)$$

Подчеркнем, что интегралы движения зависят только от “половины” данных рассеяния: переменных  $|r(k)|$  и  $\kappa_n$ , но не зависят от  $\arg r(k)$  и  $\beta_n$  (переменные действие–угол).

Особого внимания заслуживают три младших интеграла:

$$Q = -2I_{-1} = \int dx u(t, x) = 4 \sum_{n=1}^N \kappa_n + \frac{2}{\pi} \int dk \ln(1 - |r(k)|^2), \quad (9.30)$$

$$P = I_0 = \frac{1}{2} \int dx u^2(t, x) = \frac{8}{3} \sum_{n=1}^N \kappa_n^3 + \frac{4}{\pi} \int dk k^2 \ln(1 - |r(k)|^2), \quad (9.31)$$

$$H = -I_1 = \int dx \left( \frac{1}{2} u_x^2 + u^3 \right) = \frac{-32}{5} \sum_{n=1}^N \kappa_n^5 + \frac{16}{\pi} \int dk k^4 \ln(1 - |r(k)|^2). \quad (9.32)$$

**Задача 13** Показать прямым вычислением, что  $I_{-1} = \frac{-1}{2} \int dx u(t, x)$ ,  $I_0 = \frac{1}{2} \int dx u^2(t, x)$  и  $I_1 = \frac{-1}{2} \int dx (u_x^2 + 2u^3)$  суть интегралы движения уравнения  $K\partial\Phi$ ,  $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ .

## 10 Лекция.

### 10.1 Вариационная производная $a(k)$ и рекурсионный оператор

Пусть  $\text{Im}k > 0$ . В силу (4.14) и (3.18) имеем:

$$\frac{\delta a(k)}{\delta u(x)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{iky} s(y, x, k) \varphi_+(x, k),$$

В силу первой строки в (4.12)

$$e^{iky} s(y, x, k) = \frac{\chi_+(y, k) \bar{\varphi}_-(x, k) - e^{2iky} \bar{\chi}_-(y, k) \varphi_+(x, k)}{-2ika(k)} \rightarrow \frac{\bar{\varphi}_-(x, k)}{-2ik}$$

Таким образом

$$\frac{\delta a(k)}{\delta u(x)} = -\frac{\varphi_+(x, k) \bar{\varphi}_-(x, k)}{2ik}. \quad (10.1)$$

Заметим, что в силу (3.18) и его аналога для  $\chi_-$  (см. (3.19)) эта вариационная производная не убывает на бесконечности,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\delta a(k)}{\delta u(x)} = -\frac{a(k)}{2ik}, \quad \text{Im}k > 0, \quad (10.2)$$

причем потенциал может быть сколь угодно гладким и быстроубывающим. Для порождающего функционала интегралов движения мы имеем

$$\frac{\delta \ln a(k)}{\delta u(x)} = -\frac{\varphi_+(x, k) \bar{\varphi}_-(x, k)}{2ika(k)}. \quad (10.3)$$

Покажем, что в отличии от рекурсионных формул для интегралов движения, выражения для вариационных производных интегралов могут быть построены явно. Для этого воспользуемся хорошо известным фактом из теории уравнения Штурма–Лиувилля. Пусть  $y_1(x, k)$ ,  $y_2(x, k)$  удовлетворяют (2.14). Тогда

$$\mathcal{L}(y_1(x, k)y_2(x, k)) = k^2 \partial_x (y_1(x, k)y_2(x, k)) \quad (10.4)$$

где

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \partial_x^3 + \frac{u(x)}{2} \partial_x + \frac{1}{2} \partial_x \circ u(x), \quad (10.5)$$

где значок  $\circ$  означает суперпозицию операторов, так что

$$(\mathcal{L}f)(x) = -\frac{1}{4}f'''(x) + \frac{u(x)}{2}f'(x) + \frac{1}{2}(u(x)f(x))', \quad (10.6)$$

$$\mathcal{L}(x, y) = \mathcal{L}\delta(x - y) = -\frac{1}{4}\delta'''(x - y) + \frac{u(x) + u(y)}{2}\delta'(x - y), \quad (10.7)$$

Введем “первообразную” этого оператора, **рекурсионный оператор**

$$(\mathcal{M}f)(x) = \int dy \mathcal{M}(x, y)f(y), \quad (10.8)$$

$$\mathcal{M}(x, y) = -\frac{\delta''(x - y)}{4} + u(x)\delta(x - y) - \frac{\text{sgn}(x - y)}{4}u'(y), \quad (10.9)$$

или

$$(\mathcal{M}f)(x) = \frac{1}{2} \int dy \text{sgn}(x - y)(\mathcal{L}f)(y), \quad \partial\mathcal{M} = \mathcal{L}, \quad (10.10)$$

так что

$$\mathcal{M}(y_1(x)y_2(x)) = k^2 \left\{ y_1(x)y_2(x) - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} y_1(x)y_2(x) - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} y_1(x)y_2(x) \right\}. \quad (10.11)$$

Отсюда следует, что произведение  $\varphi_+(x, k)\bar{\varphi}_-(x, k)$  не является собственной функцией для  $\mathcal{M}$ , а обладает замечательным свойством рекурсии. Действительно, по (10.11)

$$\mathcal{M}(\varphi_+(x, k)\bar{\varphi}_-(x, k)) = k^2\varphi_+(x, k)\bar{\varphi}_-(x, k) - k^2a(k) \quad (10.12)$$

откуда

$$\mathcal{M} \frac{\delta \ln a(k)}{\delta u(x)} = k^2 \frac{\delta \ln a(k)}{\delta u(x)} + \frac{k}{2i} \quad (10.13)$$

Подставим сюда асимптотическое разложение (9.26)

$$\mathcal{M} \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{2}{(2ik)^{2j+3}} \frac{\delta I_j}{\delta u(x)} = k^2 \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{2}{(2ik)^{2j+3}} \frac{\delta I_j}{\delta u(x)} + \frac{k}{2i} \quad (10.14)$$

Отсюда

$$\frac{\delta I_{-1}}{\delta u(x)} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\delta I_0}{\delta u(x)} = u(x), \quad \frac{\delta I_{j+1}}{\delta u(x)} = -4\mathcal{M} \frac{\delta I_j}{\delta u(x)} \quad (10.15)$$

Таким образом

$$\frac{\delta I_j}{\delta u(x)} = -\frac{1}{2}(-4\mathcal{M})^{j+1}1 = (-4\mathcal{M})^j u(x) \quad (10.16)$$

## 10.2 Оператор дуальный к $\mathcal{M}$

Введем оператор дуальный к  $\mathcal{M}$ :

$$(\mathcal{M}'f)(x) = -\frac{1}{4}\partial_x^2 f(x) + u(x)f(x) + \frac{u_x(x)}{4} \int dy \operatorname{sgn}(x-y)f(y) \quad (10.17)$$

так что

$$\int dx (\mathcal{M}'f)(x)g(x) = \int dx f(x)(\mathcal{M}g)(x), \quad (10.18)$$

Заметим, что

$$(\mathcal{M}'f)(x) = \frac{1}{2}\mathcal{L} \int dy \operatorname{sgn}(x-y)f(y), \quad (10.19)$$

и если  $f(\pm\infty) = 0$ , то

$$\mathcal{M}'\partial = \mathcal{L} = \partial\mathcal{M}. \quad (10.20)$$

## 10.3 Резольвента оператора $\mathcal{L}$

Исследование дифференциального оператора сводится к исследованию его резольвенты, которую для оператора  $\mathcal{L} - k^2\partial_x$  мы обозначим  $\mathcal{G}(x, y, k)$ , т.е.

$$(\mathcal{L}_x - k^2\partial_x)\mathcal{G}(x, y, k) = \delta(x-y). \quad (10.21)$$

Отсюда

$$(\mathcal{M}_x - k^2)\mathcal{G}(x, y, k) = \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{2}. \quad (10.22)$$

Проверим, что

$$\mathcal{G}(x, y, k) = \frac{is(x, y, k)}{ka(k)} [\theta(y-x)\varphi(x, k)\bar{\psi}(y, k) + \theta(x-y)\varphi(y, k)\bar{\psi}(x, k)], \quad (10.23)$$

что можно записать также как

$$\mathcal{G}(x, y, k) = \frac{is(x, y, k)}{2A(k)} [\varphi(x, k)\bar{\psi}(y, k) + \varphi(y, k)\bar{\psi}(x, k)] - \operatorname{sgn}(x-y)s^2(x, y, k). \quad (10.24)$$

По (4.12)  $s(x, y, k)$  имеет ноль первого порядка при  $x = y$ . При действии  $\mathcal{L} - k^2\partial_x$  на  $\mathcal{G}$  первое слагаемое дает ноль, поскольку оно билинейно по решениям уравнения Штурма–Лиувилля по  $x$ . Член во втором слагаемом, когда все производные

сидятся на  $s^2$ , также зануляется. Заметим, что  $s^2(x, y, k) = (x - y)^2 + \dots$ . Тогда, учитывая что

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^3}{\partial x^3} (\operatorname{sgn} x) x^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |x| = \delta(x),$$

получаем (10.21). Более того, выполнены свойства

$$\mathcal{G}(x, y, k) = -\mathcal{G}(y, x, k), \quad (10.25)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}(x, y, k)}{\partial u(z)} + (\text{цикл по } x, y, z) = 0, \quad (10.26)$$

где первое равенство очевидно, а последнее получается путем длительных вычислений, которые мы здесь опускаем.

## 10.4 Обобщение стандартной конструкции

Пусть  $F(u) \in \mathcal{F}$ , где  $\mathcal{F}$  означает множество дифференцируемых функционалов от  $u$ . Касательный вектор  $\xi \in T\mathcal{F}$ . Если  $\xi, \eta \in T\mathcal{F}$ , то  $[\xi, \eta] \in T\mathcal{F}$ . Действие касательного вектора на функционал задается как<sup>1</sup>

$$\xi F = \int dx \xi(x) \frac{\delta F}{\delta u(x)} + \xi_0 \left( \frac{\delta F}{\delta u(+)} - \frac{\delta F}{\delta u(-)} \right) \quad (10.27)$$

где

$$\frac{\delta F}{\delta u(\pm)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\delta F}{\delta u(x)} \quad (10.28)$$

т.е. мы сразу учли, что вариационные производные наших функционалов не убывают на бесконечности (ср. (10.2)). Итак, каждому  $\xi \in T\mathcal{F}$  сопоставлены  $(\xi(x), \xi_0)$ . Дифференциал функционала определяется как

$$\xi F = dF(\xi) \quad (10.29)$$

т.е. дает пример 1-формы:  $dF \in T^*\mathcal{F}$ . Заметим, что  $dF(\xi) \in \mathbb{C}$ . В общем случае 1-форма  $\omega^1: T^*\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$  задается посредством

$$\omega^1(\xi) = \int dx \omega(x) \xi(x) + \xi_0 (\omega(+)) - \omega(-) \quad (10.30)$$

где

$$\omega(\pm) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \omega(x). \quad (10.31)$$

---

<sup>1</sup>При таком определении  $\xi, \eta \in T\mathcal{F} \Rightarrow [\xi, \eta] \in T\mathcal{F}$ .

Итак,  $\omega^1 \in T^*\mathcal{F}$ . Аналогично, как полинейные, антисимметричные функции на касательных векторах определяются высшие формы, например:

$$\begin{aligned}\omega^2(\xi, \eta) = & \int \int dx dy \omega(x, y) \xi(x) \eta(y) + \\ & + \int dx (\omega(x, +) - \omega(x, -)) (\eta_0 \xi(x) - \xi_0 \eta(x))\end{aligned}\quad (10.32)$$

где  $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$ . Внешняя производная  $n$ -формы определяется как  $n + 1$ -форма посредством равенства

$$\begin{aligned}d\omega(\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) = & \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \xi_i \omega(\xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \xi_{n+1}) + \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq n+1}^n (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \xi_{n+1}),\end{aligned}\quad (10.33)$$

где  $\widehat{\phantom{x}}$  означает, что соответствующий аргумент опущен.

Легко получить, что  $d^2 = 0$ . Форма называется **замкнутой**, если  $d\omega = 0$ . Форма  $\omega$  называется **точной**, если  $\exists \Omega$  такая, что  $\omega = d\Omega$ . Форма  $\omega$  называется **невырожденной**, если из условия, что для  $\forall \xi$  выполнено  $\omega(\xi, \eta) = 0$  следует, что  $\eta = 0$ .

**Задача 14** Доказать равенство (10.4).

## 11 Лекция

### 11.1 Разложение $\mathcal{G}$ по $k^2$ в нуле и $l$ -ая скобка Пуассона

Как обычно, 2-форма называется **симплектической**, если она замкнута и невырождена. **Гамильтонов оператор**  $J: \{dF\} \rightarrow T\mathcal{F}$  задается

$$\forall \xi \in T\mathcal{F} : \quad \omega(\xi, JdG) = dG(\xi) \quad (11.1)$$

тогда **скобка Пуассона** вводится посредством равенства:

$$\forall F, G \in \mathcal{F} : \quad \{F, G\} = \omega(JdF, JdG) \quad (11.2)$$

Скобка Пуассона линейна по своим аргументам, антисимметрична, невырождена:

$$\forall F \in \mathcal{F} : \quad \{F, G\} = 0 \implies G = 0 \quad (11.3)$$

и удовлетворяет тождеству Якоби:

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0. \quad (11.4)$$

Для 2-формы  $\omega$  ядро  $d\omega$  есть

$$\frac{\delta\omega(x, y)}{\delta u(z)} + (\text{цикл}) = 0, \quad (11.5)$$

поэтому и проверка замкнутости формы гораздо проще, чем проверка тождества Якоби для скобки Пуассона. Более того, сумма симплектических структур есть снова симплектическая структура.

Как следует из (10.26) ядро  $\mathcal{G}(x, y, k)$  может быть взято в качестве ядра симплектической формы при любом  $k$ , поскольку в силу существования обратного по (10.21) это ядро невырождено. Найдем коэффициенты разложения этого ядра по  $k^2$  в нуле. По (10.22)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y, k) &= \int dx' ((\mathcal{M} - k^2)^{-1})(x, x') \frac{\text{sgn}(x' - y)}{2} = \\ &= \int dx' ((1 - k^2 \mathcal{M}^{-1})^{-1} \mathcal{M}^{-1})(x, x') \frac{\text{sgn}(x' - y)}{2} = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} k^{2(l-1)} \int dx' \mathcal{M}^{-l}(x, x') \frac{\text{sgn}(x' - y)}{2} = \sum_{l=1}^{\infty} k^{2(l-1)} (\partial \mathcal{M}^l)^{-1}(x, y), \end{aligned}$$



где мы полагаем

$$\partial^{-1}(x, y) = \frac{\operatorname{sgn}(x - y)}{2}. \quad (11.6)$$

Теперь, введем

$$\omega_l(x, y) = -(\partial \mathcal{M}^l)^{-1}(x, y) \equiv - \int dy' \mathcal{M}^{-l}(x, y') \frac{\operatorname{sgn}(y' - y)}{2}. \quad (11.7)$$

Тогда

$$\omega_l(x, \pm) = \frac{\pm 1}{2} \int dy \mathcal{M}^{-l}(x, y), \quad (11.8)$$

и по (10.32)

$$\begin{aligned} \omega_l(\xi, \eta) = & - \int \int dx dy (\partial \mathcal{M}^l)^{-1}(x, y) \xi(x) \eta(y) + \\ & + \int \int dx dy \mathcal{M}^{-l}(x, y) (\eta_0 \xi(x) - \xi_0 \eta(x)), \quad l = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11.9)$$

Гамильтонов оператор  $J_l$  определяется по (11.1):

$$- \int dy (\partial \mathcal{M}^l)^{-1}(x, y) (J_l dF)(y) + (J_l dF)_0 \int dy \mathcal{M}^{-l}(x, y) = \frac{\delta F}{\delta u(x)}, \quad (11.10)$$

$$- \int \int dx dy \mathcal{M}^{-l}(x, y) (J_l dF)(x) = \frac{\delta F}{\delta u(+)} - \frac{\delta F}{\delta u(-)}. \quad (11.11)$$

Применяя  $\mathcal{M}^l$  к равенству (11.10), имеем

$$- \int dy \frac{\operatorname{sgn}(x - y)}{2} (J_l dF)(y) + (J_l dF)_0 = \int dy \mathcal{M}^l(x, y) \frac{\delta F}{\delta u(y)},$$

откуда

$$(J_l dF)(x) = - \int dy (\partial \mathcal{M}^l)(x, y) \frac{\delta F}{\delta u(y)}, \quad (11.12)$$

$$(J_l dF)_0 = \frac{\delta_{l,0}}{2} \left( \frac{\delta F}{\delta u(+)} + \frac{\delta F}{\delta u(-)} \right), \quad (11.13)$$

где мы воспользовались тем, что по (10.9)

$$\mathcal{M}(+, y) = - \mathcal{M}(-, y),$$

так что  $(J_l dF)_0$  отличен от нуля только при  $l = 0$ . Окончательно

$$\begin{aligned} \{F(u), G(u)\}_l &= \\ &= \frac{1}{2} \int \int dx dy \left( \frac{\delta F}{\delta u(x)} (\partial \mathcal{M}^l)(x, y) \frac{\delta G}{\delta u(y)} - \frac{\delta G}{\delta u(x)} (\partial \mathcal{M}^l)(x, y) \frac{\delta F}{\delta u(y)} \right) - \\ &- \frac{\delta_{l,0}}{2} \left( \frac{\delta F}{\delta u(+)} \frac{\delta G}{\delta u(-)} - \frac{\delta F}{\delta u(-)} \frac{\delta G}{\delta u(+)} \right). \end{aligned} \quad (11.14)$$

и, в частности,

$$\{u(x), u(y)\}_l = \partial_x (-4\mathcal{M})^l \delta(x - y) \equiv \partial_x (-4\mathcal{M})^l(x, y). \quad (11.15)$$

Заметим, что

$$\{I_j, u(x)\}_l = -\partial_x \mathcal{M}^l \frac{\delta I_j}{\delta u(x)} = -2(-4)^j \partial_x \mathcal{M}^{l+j+1}, \quad (11.16)$$

при всех  $j = -1, 0, 1, \dots, l = 0, 1, 2, \dots$ . Как мы видим, ответ зависит только от суммы  $l + j$ , т.е. увеличивая номер скобки, мы получаем тот же ответ, уменьшая номер интеграла.

## 12 Лекция

### 12.1 Примеры скобок

Мы доказали равенство (11.16), показывающее, что скобка  $l$ -я Пуассона  $j$ -го интеграла движения с  $u(x)$  зависит, с точностью до множителя, только от суммы  $l + j$ . В частности, пусть  $l + j = -1$ , что возможно лишь при  $j = -1$ ,  $l = 0$ . Тогда

$$\{I_{-1}, u(x)\}_0 = 0, \quad (12.1)$$

поэтому  $I_{-1}$  часто называют “аннулятором” нулевой скобки. Ниже мы увидим, почему этот термин здесь появляется в кавычках. Отметим также, что по (11.16)

$$\{I_0, u(x)\}_0 = -u_x(x), \quad \{I_1, u(x)\}_0 = 6u(x)u_x(x) - u_{xxx}(x), \quad (12.2)$$

где мы воспользовались (10.10) (10.5). Итак,  $I_0$  играет роль импульса, а  $I_1$  – гамильтониана КдФ для нулевой скобки. Далее, пусть  $l + j = 0$ , что возможно при  $l = 0$  и  $j = 0$  (что мы уже рассмотрели), либо при  $l = 1$  и  $j = -1$

$$\{I_j, u(x)\}_l \Big|_{l+j=1} = -(-4)^j u_x(x), \text{ так что } \{I_{-1}, u(x)\}_1 = \frac{1}{4} u_x(x),$$

т.е. по отношению к первой скобке  $I_{-1}$  вовсе не аннулятор, а импульс, ну и легко видеть, что

$$\{I_0, u(x)\}_1 = -\frac{1}{4} (6u(x)u_x(x) - u_{xxx}(x)), \quad (12.3)$$

так что бывший генератор пространственных сдвигов (импульс) стал гамильтонианом (с точностью до константы). Ну и, наконец, при  $l + j = 1$  нам помимо уже рассмотренных случаев  $l = 0$ ,  $j = 1$  и  $l = 1$ ,  $j = 0$ , осталось рассмотреть  $l = 2$ ,  $j = -1$ :

$$\{I_{-1}, u(x)\}_2 = \frac{1}{4^2} (6u(x)u_x(x) - u_{xxx}(x)). \quad (12.4)$$

Полученные равенства явно показывают, как сдвигается роль интегралов движения при смене номера скобки. Заметим, что меняются и существенные характеристики, например гамильтониана: гамильтониан для нулевой и второй скобок не является знакоопределенным, а для скобки с номером 1 он знакоопределен.

## 12.2 Иерархия КдФ

Аналогично можно ввести высшие времена  $t_2, t_3, \dots$  и высшие уравнения, положив, что помимо  $t_1$  (времени КдФ по скобке с номером 0), функция  $u$  зависит от произвольного (формально – бесконечного) числа этих времен посредством равенств:

$$\partial_{t_{j+l}} u = \{I_{j+l}, u\}_0 \equiv \{I_j, u\}_l, \quad (12.5)$$

т.е. по (12.5), (10.15), (10.16):

$$\partial_{t_j} u = \{I_j, u\}_0 = -\partial_x \frac{\delta I_j}{\delta u(x)} = -\partial_x \mathcal{M}^{j-l} \frac{\delta I_l}{\delta u(x)}, \quad j \geq l. \quad (12.6)$$

Но здесь возникает проблема: если мы “включили” время  $t_1$ , а потом  $t_2$ , то результат, вообще говоря, может отличаться от того, который мы получим при обратном способе действий. Покажем, что это не так, что выполняется “условие нулевой кривизны”. По (12.5) мы имеем:  $\partial_{t_k} \partial_{t_j} u = \{I_j, \{I_k, u\}_0\}_0$ , что означает, что мы включили сначала  $t_k$ , а потом  $t_j$ . Вычитая результат при обратном порядке действий и пользуясь тождеством Якоби, мы получаем

$$(\partial_{t_j} \partial_{t_l} - \partial_{t_l} \partial_{t_j}) u = \{\{I_j, I_l\}_0, u\}_0. \quad (12.7)$$

Найдем  $l$ -ую,  $l \geq 0$ , скобку Пуассона интегралов движения. По (11.14) для  $j \geq 0$  и  $k \geq 1$ ,

$$\{I_j, I_k\}_l = (-4)^{j+k} \int dx (\mathcal{M}^j u)(x) \partial_x (\mathcal{M}^{l+k} u)(x) =$$

(перебросим производную на первый сомножитель)

$$= -(-4)^{j+k} \int dx (\partial \mathcal{M}^j u)(x) (\mathcal{M}^{l+k} u)(x) =$$

(воспользуемся  $\partial \mathcal{M}^j = \mathcal{M}'^j \partial$  (10.20))

$$= -(-4)^{j+k} \int dx (\mathcal{M}'^j u_x(x)) (\mathcal{M}^{l+k} u)(x) =$$

(воспользуемся тем, что оператор  $\mathcal{M}'$  дуален оператору  $\mathcal{M}$ )

$$= -(-4)^{j+k} \int dx u_x(x) (\mathcal{M}^{j+k+l} u)(x).$$

Теперь заметим, что левая часть, по определению, антисимметрична по индексам, а правая – симметрична, что возможно только если они обе равны нулю. Итак, мы доказали, что

$$\{I_j, I_k\}_l = 0 \quad (12.8)$$

что доказывает, что и левая часть (12.7) равна нулю, т.е. доказывает выполнение условия нулевой кривизны. Мы видим, что интегралы движения находятся в инволюции по отношению к любой из скобок иерархии. Соответственно, они являются интегралами движения по отношению к любому из времен  $t_k$ ,  $k \geq 1$ :

$$\frac{\partial I_j}{\partial t_k} = 0 \quad \forall j, k. \quad (12.9)$$

Мы показали замечательное свойство интегрируемых уравнений: наличие бесконечной иерархии не только интегралов движения, но и пуассоновых скобок. По отношению к выбранной скобке и гамильтониану все другие эволюции, задаваемые другими временами являются симметриями уравнения КдФ, или любого из выбранных уравнений. Таким образом можно сказать, что интегрируемое уравнение обладает бесконечным набором коммутирующих симметрий – это свойство часто принимают за определение интегрируемости.

### 12.3 Скобки Гарднера и Магри

Форма  $\omega_0$  при  $l = 0$  в (11.9) была введена Захаровым и Фаддеевым. Она дает скобку Гарднера, которая в силу (11.14) имеет вид

$$\begin{aligned} \{F(u), G(u)\}_0 \equiv \{F(u), G(u)\} &= \frac{1}{2} \int dx \left( \frac{\delta F}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta G}{\delta u(x)} - \frac{\delta G}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta F}{\delta u(x)} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \left( \frac{\delta F}{\delta u(+)} \frac{\delta G}{\delta u(-)} - \frac{\delta F}{\delta u(-)} \frac{\delta G}{\delta u(+)} \right), \end{aligned} \quad (12.10)$$

где использовано обозначение

$$\frac{\delta F}{\delta u(\pm)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\delta F}{\delta u(x)}. \quad (12.11)$$

Рассмотрим для простоты скобки на таких функционалах, что для по крайней мере одной из вариаций  $\frac{\delta F}{\delta u(\pm)}$  или  $\frac{\delta G}{\delta u(\pm)} = 0$ . Тогда вид скобки заметно упрощается:

$$\{F(u), G(u)\}_0 = \int dx \frac{\delta F}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta G}{\delta u(x)}, \quad (12.12)$$

что, собственно, и является исходной формой скобки Гарднера. Отсюда, в частности,

$$\{u(x), u(y)\}_0 = \delta'(x - y) \quad (12.13)$$

В силу (9.32) и (12.2)

$$H = -I_1 = \int dx \left( \frac{1}{2} u_x^2 + u^3 \right) \quad (12.14)$$

так что, как мы видели выше, динамика КдФ задается посредством  $u_t = \{u, H\}_0$ . Кроме того, мы имеем  $\{u(x), I_1\}_0 = 0$ , см. (12.1). Однако, по (12.10) для произвольного функционала  $F(u)$  скобка равна:

$$\{F(u), I_1\}_0 = \frac{\delta F}{\delta u(-)} - \frac{\delta F}{\delta u(+)}, \quad (12.15)$$

т.е. возникает поразительная ситуация, аналога которой для систем конечного числа свободы нет: скобка Пуассона  $I_1$  с  $u(x)$  равна нулю, а с некоторыми функционалами от  $u(x)$  нулю не равна. Тем не менее  $I_1$  часто называют аннулятором скобки Гарднера–Захарова–Фаддеева. Заметим, что для скобки в форме (12.12) имеется проблема:  $\{F(u), I_1\}_0 = 0$ , а значение  $\{I_1, F(u)\}_0$ , вообще говоря, не равно нулю, как не равно и значению в (12.15). Именно модификация (12.10) этой скобки позволила устранить эту неоднозначность, а также разрешить проблемы вырожденности скобки при невырожденной симплектической форме.

Рассмотрим теперь второй член иерархии скобок: скобку Магри ( $l = 1$ ):

$$\{F, G\}_1 = \int dx \frac{\delta F}{\delta u(x)} \mathcal{L} \frac{\delta G}{\delta u(x)}, \quad (12.16)$$

откуда

$$\begin{aligned} \{u(x), u(y)\}_1 &= \mathcal{L} \delta(x - y) \equiv \mathcal{L}(x, y) \equiv \\ &\equiv -\frac{\delta'''(x - y)}{4} + \frac{u(x) + u(y)}{2} \delta'(x - y) \end{aligned} \quad (12.17)$$

Собственно, только эта скобка и скобка Гарднера из всей иерархии являются локальными. Как мы говорили выше, для этой скобки все интегралы сдвигаются. Открытие этой скобки явилось первым примером построения высшей скобки для гамильтоновой системы.

**Задача 15** Доказать равенства (12.2).

**Задача 16** Доказать равенство (12.3).

**Задача 17** Доказать равенство (12.4).

## 13 Лекция

### 13.1 Коммутаторные тождества

Для любых двух элементов  $A$  и  $B$  произвольной ассоциативной алгебры выполнено следующее коммутаторное тождество:

$$[A^3, [A, B]] - \frac{3}{4}[A^2, [A^2, B]] - \frac{1}{4}[A, [A, [A, [A, B]]]] = 0. \quad (13.1)$$

Для доказательства этого тождества достаточно раскрыть все скобки, пользуясь свойством ассоциативности. Заметим теперь, что коммутаторы степеней оператора  $A$  коммутируют между собою. Поэтому мы можем задать зависимость  $B$  от произвольного набора времен  $t_1, t_2, \dots$  формулами

$$B_{t_1} = [A, B], \quad B_{t_2} = [A^2, B], \quad B_{t_3} = [A^3, B], \dots, \quad (13.2)$$

что в силу (13.1) означает, что функция  $B(t_1, t_2, t_3)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t_1 \partial t_3} - \frac{3}{4} \frac{\partial^2 B(t)}{\partial t_2^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^4 B(t)}{\partial t_1^4} = 0, \quad (13.3)$$

т.е. линеаризованному уравнению КПП.

Тождество (13.1), как было сказано, можно доказывать непосредственной проверкой. Однако проще провести доказательство для случая, когда оператор  $A$  есть оператор умножения в некотором пространстве:  $(Af)(x) = xf(x)$ , а оператор  $B$  – интегральный оператор  $(Bf)(x) = \int dy B(x, y)f(y)$  с произвольным ядром  $B(x, y)$ . Тогда для ядра коммутатора имеем  $[A, B](x, y) = (x - y)B(x, y)$ , и аналогично, для всех старших степеней  $[A^n, B](x, y) = (x^n - y^n)B(x, y)$ . Вообще, для произвольной функции от оператора  $A$  имеем  $[F(A), B](x, y) = (F(x) - F(y))B(x, y)$ . Обозначая  $\alpha = x - y$ ,  $\beta = x^2 - y^2$ , имеем:  $x = \frac{\beta + \alpha^2}{2\alpha}$  и  $y = \frac{\beta - \alpha^2}{2\alpha}$ . Так что  $F(x) - F(y) = F\left(\frac{\beta + \alpha^2}{2\alpha}\right) - F\left(\frac{\beta - \alpha^2}{2\alpha}\right)$ , что, собственно, и дает тождество. В частности, полагая  $F(A) = A^n$ , получаем

$$x^n - y^n = \frac{1}{2^n(x - y)^{n-2}} \sum_{m=1}^n \frac{n!(1 - (-1)^m)}{m!(n - m)!} (x - y)^{2(m-1)} (x^2 - y^2)^{n-m},$$

так что мы пришли к полубесконечному набору коммутаторных тождеств

$$\begin{aligned}
& [A^n, \underbrace{[A, \dots, [A, B] \dots]}_{n-2}] = \\
& = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \frac{n!}{(2m+1)!(n-2m-1)!} \underbrace{[A^2, \dots, [A^2]}_{n-2m-1} \underbrace{[A, \dots, [A, B] \dots]}_{4m}, \quad n \geq 2,
\end{aligned} \tag{13.4}$$

которое также можно проверить непосредственно. Здесь  $[(n-1)/2]$  означает целую часть числа. В силу (13.2) мы видим, что по переменным  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_n$  выполняются уравнения:

$$\frac{\partial^{n-1} B(t)}{\partial t_1^{n-2} \partial t_n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \frac{n!}{(2m+1)!(n-2m-1)!} \frac{\partial^{n+2m-1} B(t)}{\partial t_1^{4m} \partial t_2^{n-2m-1}}, \tag{13.5}$$

которые называются высшими линеаризованными уравнениями КПШ иерархии. В этом проявляется одно из специфических свойств интегрируемых уравнений: они всегда являются элементами бесконечных иерархий интегрируемых уравнений, упорядоченных по степеням старших производных. При этом следует иметь ввиду, что включение, скажем, четырех времен (например,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  и  $t_4$ ) не означает, что мы имеем интегрируемое уравнение функции четырех переменных. На самом деле, функция  $B(t)$  в этом случае удовлетворяет двум уравнениям из (13.5), каждое из которых является уравнением по трем независимым переменным: при  $n=3$  это  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ , а при  $n=4$  – это  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_4$ .

Введя зависимость оператора  $B$  от “времен” (независимых переменных) по (13.2) мы прошли к линейным дифференциальным уравнениям, которым он удовлетворяет в силу коммутаторных тождеств. Теперь наша задача – построить соответствующие нелинейные уравнения. Однако предварительно мы рассмотрим операторную реализацию элементов  $A$  и  $B$  ассоциативной алгебры.

## 13.2 Операторы $A$ и $B$

В силу первого равенства в (13.2) оператор  $B$  зависит от  $t_1$ , поэтому естественно считать, что он действует в пространстве функций вещественной переменной  $t_1$ , например  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, dt_1)$ . Чтобы удовлетворить (13.2), достаточно задать оператор  $A$  так, что

$$AB = B_{t_1} + zB, \text{ и } BA = zB, \tag{13.6}$$



где  $z$  – параметр,  $z \in \mathbb{C}$ . Итак  $A$  и  $B$  – псевдодифференциальные операторы, символы которых зависят от  $t_1$  и  $z$ , причем композиция псевдодифференциальных операторов  $F(t_1, z)$  и  $G(t_1, z)$  определяется как:

$$(FG)(t_1, z) = \frac{1}{2\pi} \int dp \int dy_1 F(t_1, z + ip) e^{ip(t_1 - y_1)} G(y_1, z), \quad (13.7)$$

Символы принадлежат пространству умеренных распределений и равенства 13.6 будут выполнены в силу (13.7), если мы положим

$$A(t_1, z) = z. \quad (13.8)$$

Более того, для произвольного  $F(t_1, z)$  имеем

$$[A, F] = \partial_{t_1} F, \quad (13.9)$$

в силу (13.7):

$$[A^n, B](t_1, z) = ((\partial_{t_1} + z)^n - z^n) B(t_1, z). \quad (13.10)$$

Пусть теперь оператор  $B(t)$  зависит от  $t_2, t_3, \dots, t_n$ , где  $n$  – некоторое конечное число, см. (13.2). Тогда по (13.7) выполнены уравнения

$$B_{t_2}(t, z) = B_{t_1 t_1}(t, z) + 2z B_{t_1}(t, z), \quad (13.11)$$

$$B_{t_3}(t, z) = B_{t_1 t_1 t_1}(t, z) + 3z B_{t_1 t_1}(t, z) + 3z^2 B_{t_1}(t, z). \quad (13.12)$$

...

$$B_{t_n}(t, z) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n! z^{n-m}}{m!(n-m)!} B_{t_1}^{(m)}(t_1, z), \quad (13.13)$$

где последнее равенство следует из (13.10).

На множестве рассматриваемых операторов можно ввести операцию  $\bar{\partial}$ -дифференцирования. По заданному оператору  $F(t, z)$  определим оператор  $\bar{\partial}F$ , задав его символ как

$$\bar{\partial}F(t, z) = \frac{\partial F(t, z)}{\partial \bar{z}}, \quad (13.14)$$

где для  $z = z_{\text{Re}} + iz_{\text{Im}}$ , и мы используем обозначение

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial z_{\text{Re}}} + i \frac{\partial}{\partial z_{\text{Im}}} \right), \quad (13.15)$$

так что  $\bar{\partial}z = 0$ ,  $\bar{\partial}\bar{z} = 1$ . В силу сделанных предположений  $\bar{\partial}F$  существует, и по (13.7) выполнено правило Лейбница для дифференцирования произведения двух операторов:

$$\bar{\partial}(FG) = (\bar{\partial}F)G + F\bar{\partial}G. \quad (13.16)$$

Для дифференциальных операторов эта процедура дает ноль. В частности по (13.8)

$$\bar{\partial}A = 0. \quad (13.17)$$

## 14 Лекция

### 14.1 Обратная задача (процедура одевания)

Поскольку у нас все операторы “нормально упорядочены”, т.е. в операторе  $F(t, A)$  все операторы  $A$  перемещены направо посредством (13.9), то мы можем писать его как символ  $F(t, z)$ . Итак, пусть оператор  $B(t, z)$  зависит от времен  $t_1, \dots, t_n$  по (13.2), см. (13.11)–(13.13). Введем оператор **одевания**  $K(t, A)$  как решение  $\bar{\partial}$ -задачи (см. (13.14))

$$\bar{\partial}K(t) = K(t)B(t), \quad (14.1)$$

нормированное на  $z$ -бесконечности условием

$$\lim_{z \rightarrow \infty} K(t, z) = 1. \quad (14.2)$$

Мы будем считать, что данная задача однозначно разрешима. Это условие требует существенных ограничений на оператор  $B$ . Но наша задача тут – вывести пару Лакса, а когда она выведена, все промежуточные условия можно опустить. Достаточно просто проверить, что предложена пара, заслуживающая названия пары Лакса. Поэтому здесь мы выводим уравнения, описывающие эволюцию оператора  $K$ . При этом мы полагаем, что равенства (14.1) и (14.2) допускают дифференцирование:

$$\bar{\partial}K_{t_n} = K_{t_n}B + KB_{t_n}, \quad (14.3)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} K_{t_n}(t, z) = 0, \quad (14.4)$$

где эволюция  $B$  задана в (13.2). В частности, для зависимости от  $t_1$  мы имеем по (13.9):

$$K_{t_1} + KA = AK, \quad (14.5)$$

что, впрочем, легко проверить по (13.7). Однако уже для эволюции по  $t_2$  ситуация более сложная. Положим, что символ оператора  $K$  обладает асимптотикой

$$K(t, z) = 1 + \frac{v(t)}{z} + \frac{w(t)}{z^2} + O(z^{-3}), \quad z \rightarrow \infty \quad (14.6)$$

где  $v(t)$  и  $w(t)$  – некоторые функции  $t$ , не зависящие от  $z$  и являющиеся, тем самым, по (13.7) операторами умножения. Равенство (14.6) мы будем формально писать в виде

$$K(t) = 1 + v(t)A^{-1} + w(t)A^{-2} + \dots \quad (14.7)$$

## 14.2 Старшие эволюции оператора $K$

Эволюции оператора  $B$  заданы по (13.2):  $B_{t_n} = [A^n, B]$ , а зависимость оператора  $K(t)$  от старших времен определяется задачей (14.1) с нормировкой (14.2). Рассмотрим  $K_{t_2}$ . Поскольку  $\bar{\partial}K_{t_2} = K_{t_2}B + K[A^2, B]$ , то мы получаем, что

$$\bar{\partial}K_{t_2} + KBA^2 = (K_{t_2}B + KA^2)B.$$

В силу (14.1) это можно записать как

$$\bar{\partial}K_{t_2} + (\bar{\partial}K)A^2 = (K_{t_2}B + KA^2)B,$$

а последнее по (13.17) в виде

$$\bar{\partial}(K_{t_2} + KA^2) = (K_{t_2}B + KA^2)B. \quad (14.8)$$

Итак мы получили, что комбинация  $K_{t_2} + KA^2$  удовлетворяет тому же уравнению (14.1), но с другой нормировкой: по (14.2)  $K_{t_2}(t, z) + K(t, z)z^2 \rightarrow z^2$  при  $z \rightarrow \infty$ . Понятно, что такому же уравнению будет удовлетворять и произведение  $P_2K$ , где  $P_2K$  – дифференциальный оператор второго порядка. Т.е.  $P_2(t, A) = A^2 + \alpha(t)A + \beta(t)$ , где мы учли нормировку. Здесь  $\alpha(t)A$  и  $\beta(t)$  – операторы умножения. Действительно, в силу (13.17)  $\bar{\partial}P_2 = 0$ , так что

$$\bar{\partial}(P_2K) = P_2KB.$$

Таким образом мы должны подобрать коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы в силу (14.6) совпадали коэффициенты при неотрицательных степенях оператора  $A$  в равенстве

$$K_{t_2} + KA^2 = P_2K, \quad (14.9)$$

причем член  $K_{t_2}$  вклада не дает, поскольку по (14.6)  $K_{t_2}(t, z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ . При такой подстановке легко получить, что  $\alpha = 0$  и  $\beta = -2u_{t_1}$ , так что

$$K_{t_2} + KA^2 = A^2K - 2u_{t_1}K, \quad (14.10)$$

как следует из нашего предположения об однозначной разрешимости обратной задачи. Полученный результат демонстрирует важнейшее свойство решения этой задачи: для его построения достаточно знать несколько первых коэффициентов.

Легко показать, что помимо (14.8) в силу (13.17) выполняются равенства

$$\bar{\partial}(K_{t_n} + KA^n) = (K_{t_n} + KA^n)B. \quad n \geq 2. \quad (14.11)$$

Мы видим, что величина  $K_{t_n} + KA^n$  удовлетворяет (14.1), но нормировка (14.2) заменяется на  $K_{t_n} + KA^n \rightarrow A^n$  при  $z \rightarrow \text{inf ty}$ . Так что мы подбираем дифференциальный оператор  $P_n$  так, чтобы выполнялась та же асимптотика, что и для неотрицательных степеней  $A$  в  $K_{t_n} + KA^n$ , а фактически, только в  $KA^n$ , поскольку в  $K_{t_n}$  участвуют только отрицательные степени  $A$ . Рассмотрим подробнее производную  $K$  по  $t_3$ . Мы полагаем, что  $P_3 = A^3 + XA^2 + YA + Z$ , где  $X(t)$ ,  $Y(t)$  и  $Z(z)$  – операторы умножения, т.е. их символы на зависят от  $z$ . В силу (14.6) мы имеем отсюда

$$X = 0, \quad Y = -3u_{t_1}, \quad Z = 3u_{t_1}u - 3u_{t_1t_1} - 3v_{t_1},$$

и, соответственно,

$$K_{t_3} + KA^3 = A^3K - 3u_{t_1}AK + 3(u_{t_1}u - u_{t_1t_1} - v_{t_1})K. \quad (14.12)$$

Мы покажем, что (14.10) и (14.12) являются парой Лакса.

## 15 Лекция

### 15.1 Коммутативность потоков

Помимо определения зависимости оператора одевания  $K$  от времен  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ , данному в (14.3), мы должны доказать, что эти потоки коммутируют. Дифференцируя (14.1) по  $t_m$ , потом по  $t_n$ , а потом в обратном порядке, мы получаем

$$\bar{\partial}K_{t_m t_n} = K_{t_m t_n} B + K_{t_n} [A^m, B] + K_{t_m} [A^n, B] + K[A^m, [A^n, B]], \text{labelcom1} \quad (15.1)$$

$$\bar{\partial}K_{t_n t_m} = K_{t_n t_m} B + K_{t_m} [A^n, B] + K_{t_n} [A^m, B] + K[A^n, [A^m, B]]. \text{labelcom2} \quad (15.2)$$

Заметим, что по тождеству Якоби

$$\begin{aligned} & [A^m, [A^n, B]] - [A^n, [A^m, B]] = \\ & [A^m, [A^n, B]] + [A^n, [B, A^m]] = [B, [A^m, A^n]], \end{aligned}$$

что равно нулю ввиду коммутативности  $A^m$  и  $A^n$ . Таким образом мы получаем, что

$$\bar{\partial}(K_{t_m t_n} - K_{t_n t_m}) = (K_{t_m t_n} - K_{t_n t_m})B,$$

а по (14.2) разность  $K_{t_m t_n} - K_{t_n t_m}$  исчезает при  $z \rightarrow \infty$ . В силу предположения об однозначной разрешимости обратной задачи, мы доказываем коммутативность производных

$$K_{t_m t_n} = K_{t_n t_m} \quad (15.3)$$

при произвольных  $m, n \geq 1$ .

### 15.2 Свойства символа оператора $B$

Рассмотрим решение уравнений (13.2), которые в силу (13.6) и (13.7) записываются как

$$B_{t_n}(t, z) = \{(\partial_{t_1} + z)^n - z^n\}B(t, z). \quad (15.4)$$

В силу наших предположений символ оператора  $B(t, z)$  допускает преобразование Фурье по переменной  $t_1$ , так что предыдущие равенства дают

$$B(t, z) = \int dp e^{ipt_1 + [(ip+z)^2 - z^2]t_2 + [(ip+z)^3 - z^3]t_3 + \dots + [(ip+z)^n - z^n]t_n} f(p, z), \quad (15.5)$$

где интегрирование идет по вещественным  $p$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  и  $f(p, z)$  – произвольная функция своих аргументов. Заметим теперь, что коэффициент

при  $t_2$ , вообще говоря, может расходиться и в любом случае дает экспоненциальный рост по  $t_2$ , даже если функция  $f(p, z)$  локальна по  $p$ . Избавиться от этих проблем можно только при условии, что либо  $p = 0$ , либо  $p = -2z_{\text{Im}}$ , либо  $z_{\text{Re}} = 0$ . Первый выбор дает константное решение, а потому неинтересен. Во втором случае мы полагаем, что  $f(p, z) = \delta(p + 2z_{\text{Im}})g(z)$ , так что

$$B(t, z) = \exp\left(\sum_m (\bar{z}^m - z^m)t_m\right)g(z), \quad (15.6)$$

где  $g(z)$  – произвольная ограниченная функция своего аргумента. Таким образом экспонента в (15.6) – чисто мнимая. Третий вариант дается условием  $f(p, z) = \delta(z_{\text{Re}})h(p, z_{\text{Im}})$ , где  $h(p, z_{\text{Im}})$  – произвольная функция. Тогда

$$B(t, z) = \int dp \exp\left(\sum_m i^m ((z_{\text{Im}} + p)^m - z_{\text{Im}}^m)t_m\right)h(p, z_{\text{Im}})\delta(z_{\text{Re}}). \quad (15.7)$$

Для того, чтобы обеспечить мнимость экспоненты в (15.7), нужно совершить замену

$$t_{2m} \rightarrow it_{2m}. \quad (15.8)$$

Заметим, что при этом коэффициенты при  $t_3$  и старших временах также стали чисто мнимыми.

Теперь уравнение (14.1) приобретает вид

$$\frac{\partial K(t, z)}{\partial \bar{z}} = K(t, \bar{z})e^{-2iz_{\text{Im}}t_1 + [z^2 - z^2]t_2 + [\bar{z}^3 - z^3]t_3}g(z), \quad (15.9)$$

что, собственно, и называется  $\bar{\partial}$ -задачей (с сопряжением). Эта запись предлагает ввести решения Йоста вместо символов оператора  $K$ :

$$\varphi(t, z) = K(t, z)e^{zt_1 + z^2t_2 + z^3t_3 + \dots}. \quad (15.10)$$

Тогда обратная задача (14.1), (14.2) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi(t, z)}{\partial \bar{z}} = \varphi(t, \bar{z})g(z), \quad (15.11)$$

$$\varphi(t, z)e^{-zt_1 - z^2t_2 - z^3t_3 - \dots} \rightarrow 1, \text{ если } z \rightarrow \infty. \quad (15.12)$$

т.е. явная зависимость от  $z$  остается только в граничном условии.

### 15.3 Уравнение КПП

Ввиду (15.10) равенства (14.10) и (14.12) преобразуются в

$$\varphi_{t_2} = \varphi_{t_1 t_1} - U(t) \varphi, \quad (15.13)$$

$$\varphi_{t_3} = \varphi_{t_1 t_1 t_1} - \frac{3}{2} U(t) \varphi_{t_1} + \left( \frac{3}{4} U_{t_1}(t) U(t) - \frac{3}{2} U_{t_1}(t) - \frac{3}{2} V(t) \right) \varphi, \quad (15.14)$$

где мы ввели для удобства

$$U = 2u_{t_1}, \quad V = 2v_{t_1}. \quad (15.15)$$

Мы знаем, что эволюции по  $t_2$  и  $t_3$  совместны. Условие совместности дает уравнение

$$(4U_{t_3} + 6UU_{t_1} - U_{t_1 t_1 t_1})_{t_1} = 3U_{t_2 t_2}, \quad (15.16)$$

что есть уравнение КПП, (2.3), при  $x = t_1$ ,  $y = t_2$  и  $t = -4t_3$ .



## 16 Вопросы к зачету

1. Общая схема метода обратной задачи. Уравнение Кортевега–де Фриза
2. Решения Йоста для уравнения Кортевега–де Фриза
3. Дискретный спектр
4. Обратная задача: задача Римана–Гильберта
5. Временная эволюция данных рассеяния.
6. Интегралы движения.
7. Скобки Гарднера–Захарова–Фаддеева и Магри.
8. Одно- и двусолитонные решения.