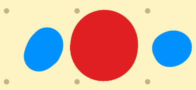
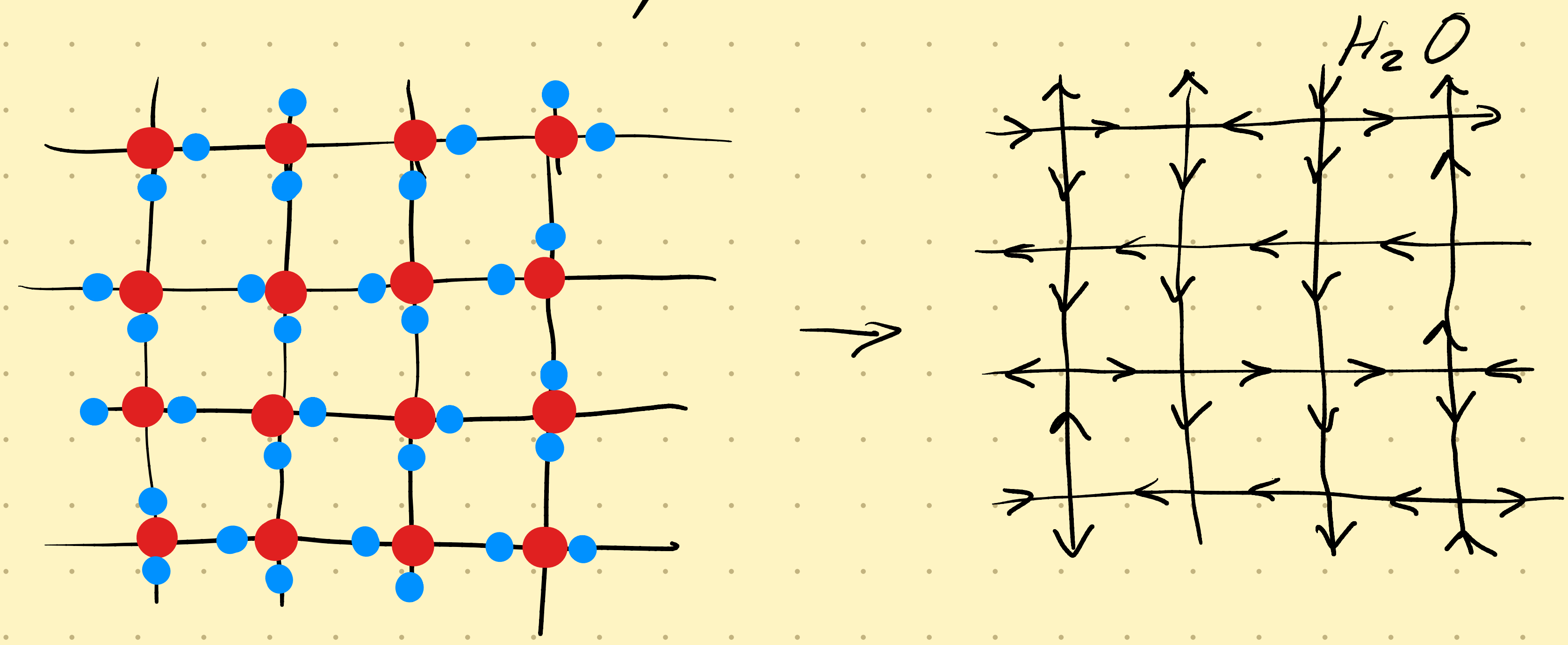
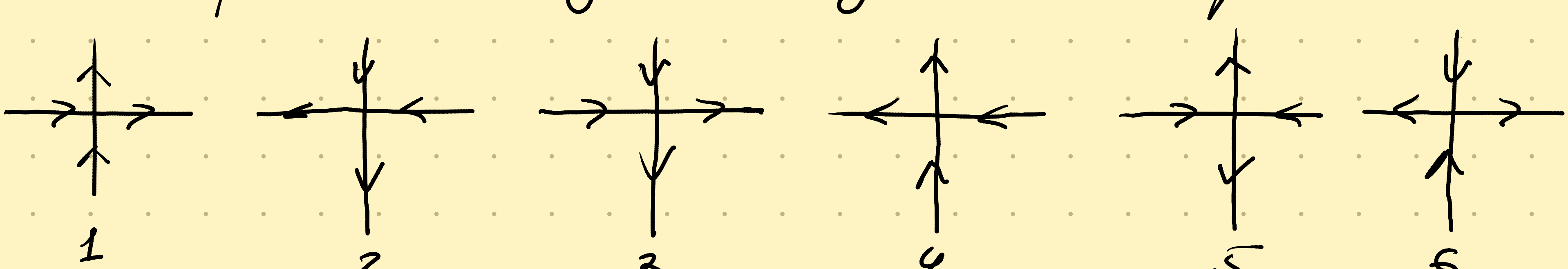
Модель квадратного льда.

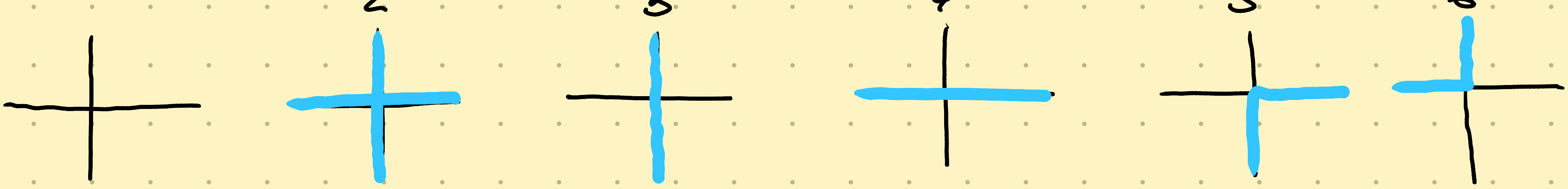




Задача расположить молекулы воды на квадратной решетке так, чтобы на каждом ребре располагался один атом водорода.

Заменим атомы водорода стрелками направив их от той вершины к которой они относятся. Условие льда означает, что число стрелок, входящих в каждую вершину и выходящих из неё одинаково и равно двум. Получим 6 вершин.





В нижней строке мы дано альтернативное представление вершин через пути на решетке, которые проходят по стрелкам, направленным вниз и влево. Видно, что пути сохраняются.

Введем энергии вершин $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6$, задающие соответствующие больцмановские веса $w_i = e^{-\frac{\varepsilon_i}{T}}$. Допустимые конф. системы все возможные конфигурации вершин на решетке, увязывающие соседние вершины.

Рассмотрим квадратную решетку с периодическими гран. условиями: $G = (\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M, E)$.

Пусть Ω - мн-во допустимых конфигураций, и $k_i(\sigma)$ число вершин типа $i = 1, \dots, 6$ в конф. $\sigma \in \Omega$.

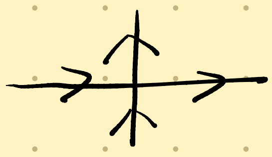
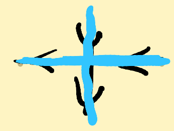
Статсумма: $Z_{N,M} = \sum_{\sigma \in \Omega} \prod_{i=1}^{6} w_i^{k_i(\sigma)}$.

Удельная своб. энергия: $f = -T \lim_{N,M \to \infty} \frac{\ln Z_{N,M}}{N,M}$.

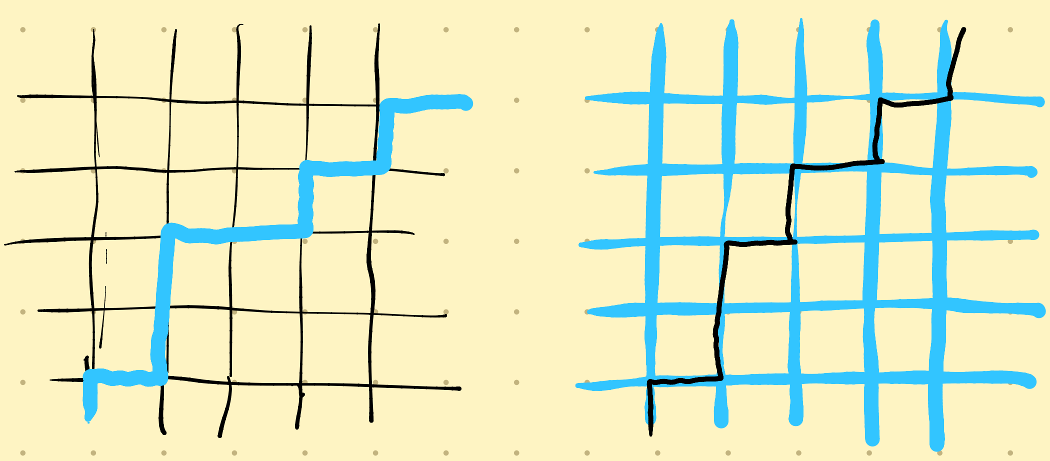
Частные случаи: $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_6 = 0 \Rightarrow w_1 = \dots = w_6 = 1$

$S = \lim_{N,M} \frac{1}{N,M} \ln Z_{N,M}$ - остаточная энтропия двумерного льда.

Сегнетоэлектрик : $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0 \quad \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon_6 > 0.$
(KDP-model)
В основном состоянии все стрелки направлены

так  или так , т.е два основных состояния с нулевой энергией.

На языке путей - это либо пустая решетка, либо наоборот. Минимальное возмущение - это путь идущий вверх и вправо через всю решётку. В термопределе имеет нулевую вероятность. Поэтому на бесконечной решетке стрелки заморожены.



- основное состояние и возмущение.

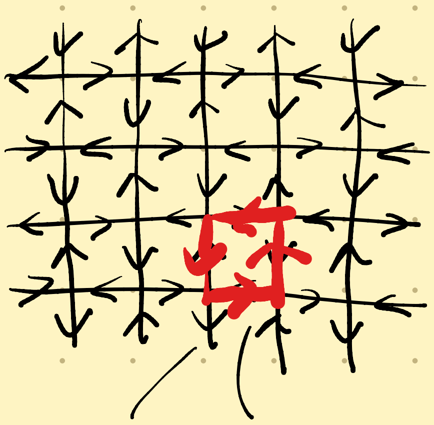
Антисегнетоэлектрик

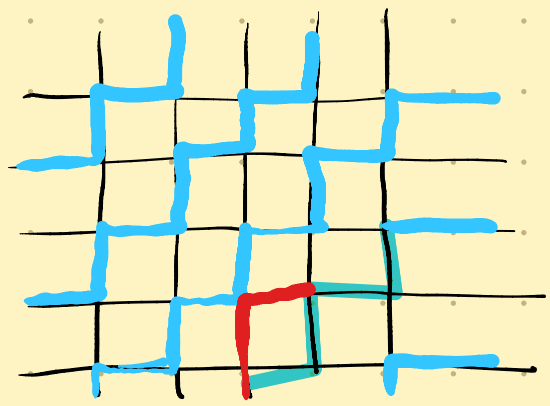
$\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_4 > 0 \qquad \varepsilon_5 = \varepsilon_6 -$

Антисегнетоэлектрик (F-model):

$\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_4 > 0 \qquad \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0$

Основное состояние (два):





Возбуждения локальны, т. е. имеют конечную вероятность. Они вносят вклад в свободную энергию, что приводит к нетривиальной термодинамике.

Решение шестивершинной модели:

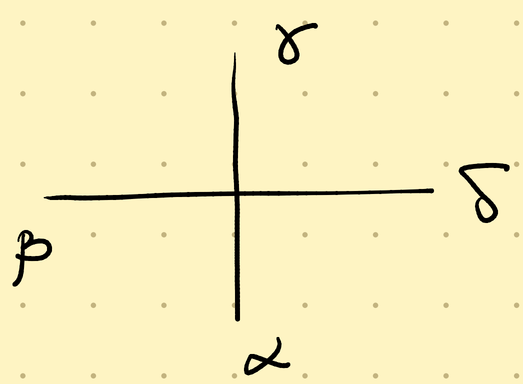
Будем рассматривать случай $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$, $\varepsilon_5 = \varepsilon_6$

$w_1 = w_2 = a \quad w_3 = w_4 = b \quad w_5 = w_6 = c$. (симметричная модель)

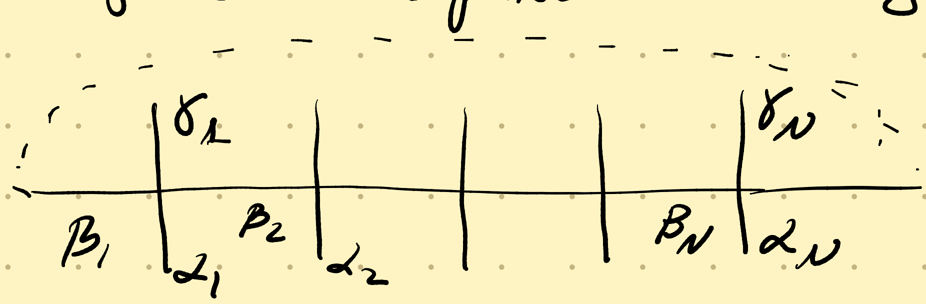
Матрица перехода.

Обозначим веса вершин: $R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$ - состояния стрелок на ребрах исходящих из вершины. на юг, запад, восток, север,

1 - вверх и вправо, 2 - вниз и влево



Матрица перехода: из $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ в $\gamma = (\gamma_1 \dots \gamma_N)$



$$T_\alpha^\gamma = \sum_\beta R_{\alpha_1\beta_1}^{\gamma_1\beta_2} R_{\alpha_2\beta_2}^{\gamma_2\beta_3} \cdots R_{\alpha_N\beta_N}^{\gamma_N\beta_1}$$

макс. собств. значение

$$Z = \mathrm{Tr}\, T^M \qquad f = \frac{1}{N} \ln \Lambda_{max}$$

Введем матрицы Паули: σ^x, σ^y, σ^z

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \qquad \sigma^y = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} \qquad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y) \Rightarrow \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{array}{c} \\ 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 11 & 12 & 21 & 22 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & c & \\ & c & b & \\ & & & a \end{pmatrix} \end{array} = Id \otimes Id \, \frac{a+b}{2} + \sigma^z \otimes \sigma^z \, \frac{a-b}{2} +$$
$$+ (\sigma^+ \otimes \sigma^- + \sigma^- \otimes \sigma^+)$$

Заведем пространство $V \cong \mathbb{C}^2$ и

$\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^{N} V_i \qquad \mathcal{H}' = V_0 \otimes \mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ – квантовое пр-во

V_0 – вспомогательное.

Обозн. для операторов: для $A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$A_i : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}' \qquad A_i \mathcal{H} = V_0 \otimes \dots \otimes V_{i-1} \otimes A V_i \otimes V_{i+1} \dots V_N$

для $B: \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

$B_{ij} : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}' \qquad B_{ij} \mathcal{H}' = \bigotimes_{i,j \neq k=1}^{N} V_i \; B(V_i \otimes V_j)$

Матрица R задает оператор в $R: \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

в базисе $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$.

$T = tr_0 \, R_{01} R_{02} \dots R_{0N} \in \mathrm{End}\, \mathcal{H}$

Вместо того чтобы диагонализовывать одну матрицу перехода T удобно диагонализовывать семейство T-матриц.

Введем матрицы R', R'' так же как R с заменой $a, b, c \to a', b', c'$ и $a, b, c \to a'', b'', c''$.

Проверим соотношение Янга-Бакстера.

$$\boxed{R''_{12} R'_{01} R_{02} = R_{02} R'_{01} R''_{12}}$$

Упражнение. Найдите при каких условиях на $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ равенство выполнено.

Матричное равенство даёт 64 ур-я из которых только 3 нетривиальны:

$$ac'a'' = bc'b'' + ca'c''$$

$$ab'c'' = ba'c'' + cc'b''$$

$$cb'a'' = ca'b'' + bc'c''$$

Система ур-й на a'', b'', c'' имеет решение, если

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{ab} = \frac{a'^2+b'^2-c'^2}{a'b'}$$

Ввведем параметр $\Delta = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Ур-е Я-Б удовлетворяется, если $\Delta = \Delta' = \Delta''$.

Параметризация a, $b = ax$ $c = a\sqrt{1+x^2-2\Delta x}$

Корни ур-я $x^2+1-2\Delta x$: $x_\pm = \Delta \pm \sqrt{\Delta^2-1}$

если $|\Delta|<1$ $x_+ = -e^{i\theta} = x_-^{-1}$ $\Delta = -\cos\theta$

$\Delta < -1$ $x_+ = -e^{-\lambda} = x_-^{-1}$ $\Delta = -\mathrm{ch}\,\lambda$.

Введем параметризацию: $a = \rho\,\mathrm{sh}(\lambda - u)$ $b = \rho\,\mathrm{sh}\,u$

тогда $c = \rho\,\mathrm{sh}\,\lambda$. Общий множитель ρ

можно выбрать произвольным. Пусть $\rho = \frac{1}{\mathrm{sh}(\lambda-u)}$

$a = a(u) = 1$ $b = b(u) = \frac{\mathrm{sh}\,u}{\mathrm{sh}(\lambda-u)}$ $c = c(u) = \frac{\mathrm{sh}\,\lambda}{\mathrm{sh}(\lambda-u)}$.

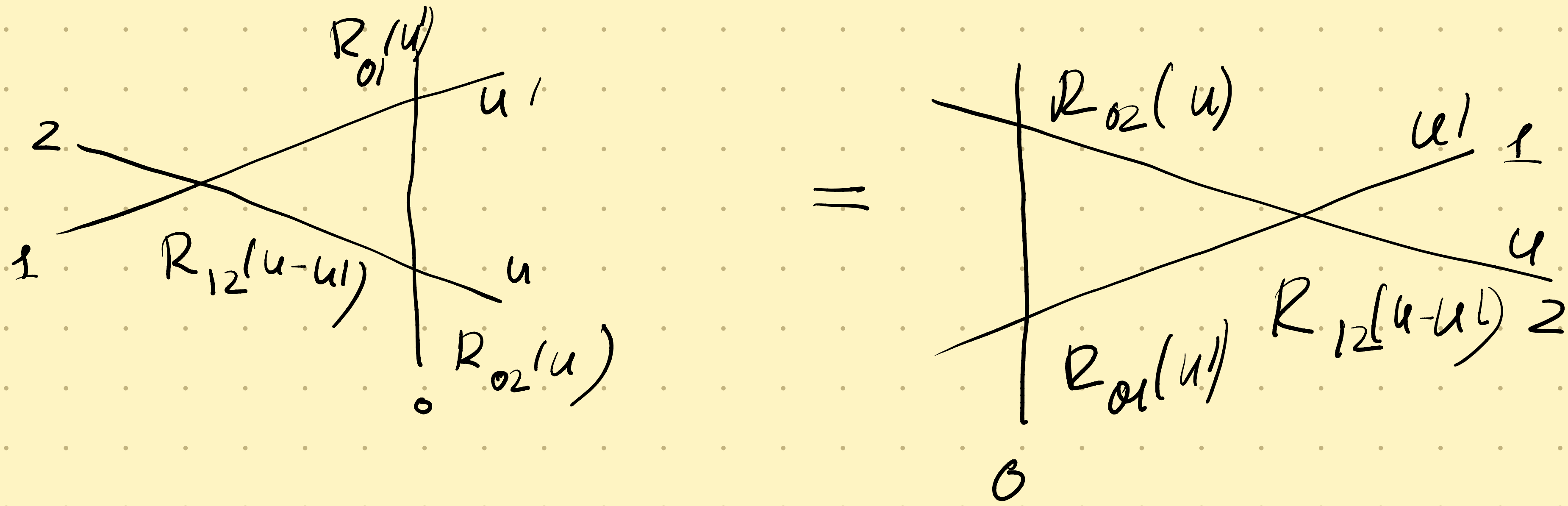
Постоянство Δ означает, что $a', b', c', a'', b'', c''$

даются теми же формулами с тем же λ,

но с $u \Rightarrow u', u''$. Подставляя их в соотношение выше получим: $u'' = u' - u$.

Пусть $R = R(u)$. Ур-е Я.-Б. принимает вид:

$$R_{12}(u'-u)\,R_{01}(u')\,R_{02}(u) = R_{02}(u)\,R_{01}(u')\,R_{12}(u'-u)$$

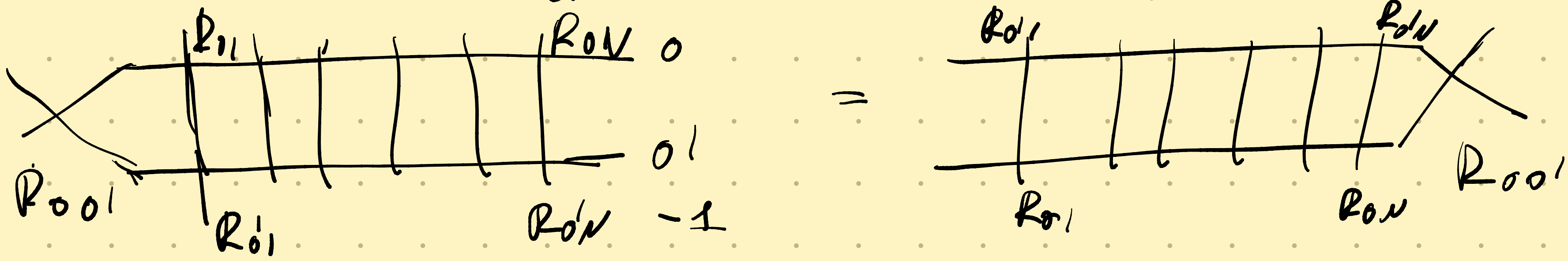


Пусть $M_0(u) = R_{01}(u) \cdots R_{0N}(u)$ — матрица монодромии,

и $T(u) = \mathrm{tr}_0 M(u)$ — матрица перехода.

Из Я.-Б. следует:

$$R_{00'}(u-u')\, M_{0'}(u')\, M_0(u) = M_0(u)\, M_{0'}(u')\, R_{00'}(u-u')$$



Домножив на $R_{00'}^{-1}$ и взяв $\mathrm{tr}_{0,0'}$ получим

$\boxed{\text{Предложение: } T(u)T(u') = T(u')T(u).}$

Мы получили семейство коммутирующих трансфер-матриц, параметризованное параметром u.

Их можно диагонализовать в одном базисе. Базисные вектора не зависят от u.

Матричные элементы $T(u)$ аналитичны в окрестности нуля.

Введем $G(u) = T(0)^{-1} T(u) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{H_n}{n!} u^n$.

Из коммутативности матриц перехода следует, что $[H_n, H_m] = 0$.

$\{H_n\}_{n=1}^{N}$ — набор интегралов движения в инволюции. => Интегрируемость.

Найдем H_1.

Заметим, что $R(0) = P = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$

$$T(0) = \mathrm{tr}_0 R_{01}(0) R_{02}(0) \dots R_{0N}(0) = \mathrm{tr}_0 P_{01} P_{02} \dots P_{0N}$$

Матрицы перестановок P_{ij} переставляют пространства:

$$P_{ij} A_j P_{ij} = A_i \quad \text{или} \quad A_j P_{ij} = P_{ij} A_i$$

$$T(0) = \mathrm{tr}_0 P_{12} P_{13} \dots P_{1N} P_{01} = P_{12} P_{13} \dots P_{1N} \mathrm{tr}_0 P_{01} =$$
$$= P_{12} P_{13} \dots P_{1N}$$

$$T'(0) = \sum_i \mathrm{tr}_0 P_{01} \dots P_{0i-1} \overset{P_{0i} \cdot P_{0i}}{\vee} R'_{0i}(0) P_{0i+1} \dots P_{0N} =$$
$$= \sum_i \mathrm{tr}_0 P_{01} \dots P_{0N} P_{ii+1} R'_{ii+1}(0) = T(0) \sum_{i=1}^{N} \check{R}_{ii+1}$$

где $\check{R} := P R'(0) = \frac{1}{sh\lambda}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & ch\lambda & 1 & \\ & 1 & ch\lambda & \\ & & & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{sh\lambda}\left[\frac{1}{2} Id_4 \cdot ch\lambda + \begin{pmatrix} -\frac{ch\lambda}{2} & & & \\ & \frac{ch\lambda}{2} & 1 & \\ & 1 & \frac{ch\lambda}{2} & \\ & & & -\frac{ch\lambda}{2} \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2sh\lambda}\left(ch\, Id + 2(\sigma^+\otimes\sigma^- + \sigma^-\otimes\sigma^+) - ch\lambda\, \sigma^z\otimes\sigma^z \right)$$

$$H_1 = \frac{1}{2sh\lambda}\sum_{i=1}^{N}\left(2(\sigma_i^+\cdot\sigma_{i+1}^- + \sigma_i^-\circ\sigma_{i+1}^+) + \Delta(\sigma_i^z\circ\sigma_{i+1}^z - 1)\right)$$

$$\frac{1}{sh\lambda}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_i^x\cdot\sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y\cdot\sigma_{i+1}^y + \Delta(\sigma_i^z\cdot\sigma_{i+1}^z - 1)\right)}$$

H^{Δ}_{xxz} - антиферромагнитный

$-H^{-\Delta}_{xxz}$ - ферромагнитный.

Диагонализация H_{xxz}:

Введем $S^z := \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^z$. $[H, S^z] = 0$,

$S^z = N_+ - N_- = N - 2N_-$

т.е. действие H_{xxz} сохраняет число N_+ стрелок вверх $\uparrow = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и N_- стрелок вниз $\downarrow = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ в тензорном произведении.

Поэтому $\mathcal{H}$ можно разбить на сектора с фиксированным S_z

Координатный анзац Бете.

$H^{\Delta}_{XXZ} \in \mathrm{End}(\mathcal{H})$ $\quad \mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^{N} V_i \quad V_i \cong \mathbb{C}^2$

$$H^{\Delta}_{XXZ} = \sum_{i=1}^{N} \left(\sigma^x_i \sigma^x_{i+1} + \sigma^y_i \sigma^y_{i+1} + \Delta(\sigma^z_i \sigma^z_{i+1} - 1)\right)$$

Базис $\mathcal{H}$: $\{ e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_N} \}$ $\quad i_k \in \{1, 2\}, \quad k = 1, \ldots, N$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle$

Построим систему собственных векторов H

Введем оператор $S^z = \sum_i \sigma^z_i = N_\uparrow - N_\downarrow = N - 2N_\downarrow$

Заметим, что выполнено равенство: $[H^{\Delta}_{XXZ}, S^z] = 0$.

Оно отражает факт сохранения проекции спина на ось z, т.е. действие $\mathcal{H}^{\Delta}_{XXZ}$ на вектор с фиксированным числом $N_\downarrow$ стрелок вниз, сохраняет $N_\uparrow$.

Т.к. операторы H^{Δ}_{XXZ} и S^z коммутируют их можно диагонализовать в одном базисе. Таким образом собственные состояния H^{Δ}_{XXZ} будут нумероваться собственными значениями оператора S^z или эквивалентно $N_\uparrow$.

Таким образом можно по отдельности рассматривать сектора с фиксированным числом $N_{\downarrow} = M$.

Перепишем $\mathcal{H}^{\Delta}_{XXZ}$ в виде

$$\mathcal{H} = 2\sum_{n=1}^{N}\left(\sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- + \sigma_n^- \sigma_{n+1}^+ + \frac{\Delta}{2}\left(\sigma_n^z \sigma_{n+1}^z - 1\right)\right)$$

и заметим, что $\sigma^+|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \quad \sigma^+|\uparrow\rangle = 0$

$\sigma^-|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \quad \sigma^-|\downarrow\rangle = 0$

Нужно решить задачу: $\mathcal{H}^{\Delta}_{XXZ}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

$M=0$: Есть единственное состояние

$|\,\rangle := |\uparrow \ldots \uparrow\rangle$ – вакуумный вектор.

$\mathcal{H}|\,\rangle = 0 \cdot |\,\rangle$

$M=1$: Есть всего N векторов $\sigma_n^-|\,\rangle =: |n\rangle$

Введем $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \psi(n)|n\rangle$

Будем решать задачу $\mathcal{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

$$\mathcal{H}|\psi\rangle = \sum |n\rangle\langle n|\mathcal{H}|\psi\rangle = E\sum |n\rangle\,\psi(n)$$

$$\langle n|\mathcal{H}|\psi\rangle = 2(\psi(n-1) + \psi(n+1)) - 2\Delta\psi(n)$$

$N+1 \equiv 1$

$-1 \equiv N$

$$:= 2\Delta_n^{(\Delta)}\psi(n) = E\psi(n) \qquad \psi(n+N) = \psi(n)$$

где $\Delta_n^{(\Delta)}\psi(n) := \psi(n+1)+\psi(n-1)-2\Delta\psi(n)$ $\quad \psi(n)=\psi(N+n)$

Ищем $\psi(n)$ в виде $\psi(n)=\psi(n|z)=z^n=e^{ip\cdot n}$ $\quad z=e^{ip}$

$\langle n|\mathcal{H}|\psi_z\rangle = 2\left(\frac{1}{z}+z\right)-\frac{\Delta}{2}\cdot 4 = 2[\cos p-\Delta] := \varepsilon(p)$

$z^n = z^{n+N}$ $\quad z^N=1$ $\quad z=e^{\frac{2\pi i k}{N}}$ $\quad k=0\ldots,N-1$ $\quad p=\frac{2\pi k}{N}$

$M=2$ $\quad |n_1,n_2\rangle = \sigma_{n_1}^-\sigma_{n_2}^-|\rangle$ $\quad \mathcal{D}_2=\{1\le n_1<n_2\le N\}$ - обл. определения,

$$|\psi\rangle = \sum_{n_1<n_2}\psi(n_1,n_2)|n_1,n_2\rangle$$

$n_1<n_2-1$

$\langle n_1,n_2|\mathcal{H}|\psi\rangle = 2\left(\Delta_{n_1}^{(\Delta)}+\Delta_{n_2}^{(\Delta)}\right)\psi(n_1,n_2)=E\psi(n_1,n_2)$ $\quad (*)$

$n_1=n_2-1=n$

$\langle n_1,n_2|\mathcal{H}|\psi\rangle = \psi(n,n+2)+\psi(n-1,n+1)-2\Delta\psi(n,n+1)=E\psi(n,n+1)$ $\quad (**)$

Расширим область определения $\psi(n_1,n_2)$ с $\mathcal{D}$ на $\tilde{\mathcal{D}}=\{1\le n_1\le n_2\le N\}$

и наложим гран. условие: $\psi(n+1,n+1)+\psi(n,n)-2\Delta\psi(n,n+1)=0$. (B.C.)

ф-я $\psi(n_1,n_2)$ удовлетворяющая $(*)$ в $\tilde{\mathcal{D}}$ с (B.C.)

удовлетворяет $(*)$ и $(**)$ в $\mathcal{D}\subset\tilde{\mathcal{D}}$.

Очевидно $\psi(n_1, n_2) = z_1^{p_1} z_2^{p_2} = e^{ip_1 n_1} e^{ik n}$ удовлетворяет

ур-ю $(*)$ с $E = \varepsilon(p_1) + \varepsilon(p_2)$.

$\psi(n_1, n_2) = z_1^{p_2} z_2^{p_1}$ также удовлетворяет $(*)$ с

тем же E

Будем искать $\psi(n_1, n_2)$ в виде

$$\psi(n|z) = \psi(n_1, n_2 | z_1, z_2) = A_{12} z_1^{n_1} z_2^{n_2} + A_{21} z_2^{n_1} z_1^{n_2} =$$

$$= A_{12} e^{i(p_1 n_1 + p_2 n_2)} + A_{21} e^{i(p_2 n_1 + p_1 n_2)}$$

Тогда $(*) \Rightarrow E = \varepsilon(p_1) + \varepsilon(p_2)$,

$$(B.C.) \Rightarrow A_{12}(1 + z_1 z_2 - 2\Delta z_2) = A_{21}(1 + z_1 z_2 - 2\Delta z_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_{21}}{A_{12}} = S(z_1, z_2) = -\frac{1 - 2\Delta z_2 + z_1 z_2}{1 - 2\Delta z_1 + z_1 z_2}$$

Периодические гран. условие: $\psi(n_1, n_2) = \psi(n_2, n_1 + N)$

$$A_{12} z_1^{n_1} z_2^{n_2} + A_{21} z_2^{n_1} z_1^{n_2} = A_{12} z_1^{n_2} z_2^{n_1+N} + A_{21} z_1^{n_1+N} z_2^{n_2}$$

экспоненты с разной экспоненциальной зависимостью от (n_1, n_2) линейно независимы.

Приравняем те слагаемые, у которых эта зависимость одна и та же: $A_{12} z_1^{n_1} z_2^{n_2} = A_{21} z_1^{n_1+N} z_2^{n_2}$

$$A_{21} z_2^{n_1} z_1^{n_2} = A_{12} z_1^{n_2} z_2^{n_1+}$$

Получим систему ур-й Бете:

$$z_1^N = \frac{A_{12}}{A_{21}} = S(z_2, z_1) = -\frac{1-2\Delta z_1 + z_1 z_2}{1-2\Delta z_2 + z_1 z_2}$$

$$z_2^N = \frac{A_{21}}{A_{12}} = S(z_1, z_2) = -\frac{1-2\Delta z_2 + z_1 z_2}{1-2\Delta z_1 + z_1 z_2}$$

Случай произвольного M: $n = 1 \le n_1 < n_2 < \ldots < n_M \le N \in \mathcal{D}_M$

$$|n\rangle = \prod_{i=1}^{M} \sigma_i^- |\Uparrow\rangle \qquad |\Psi\rangle = \sum \Psi(n)|n\rangle$$

$n_i < n_{i+1} - 1$

$$\langle n|H|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{M} \Delta_{n_i}^{(\Delta)} \Psi(n) = E\Psi(n) \quad \text{– свободное ур-е.} \quad (*)$$

Взаимодействие: нужно учесть ситуации, когда в n есть кластеры вида: $\ldots n_k = n, n+1, \ldots, n+e = n_{k+e}, \ldots$ и $n_{k-1} < n_k - 1$ $\quad n_{k+e+1} > n_{k+e} + 1$. Тогда правая часть взаимодействующего ур-я $(**)$ будет состоять из слагаемых типа

$$\langle n|H|\Psi\rangle = \Psi(n-1, n+1, \ldots, n+e) + \Psi(n, \ldots, n+e-1, n+e+1) - 2\Delta\Psi(n)$$

для каждого кластера.

<u>Предложение.</u> Ур-е $\langle n|H|\Psi\rangle = E\Psi(n)$ выполнено в $\mathcal{D}_M \Leftrightarrow$ оно выполнено в $\tilde{\mathcal{D}}_M = \bigcup_k \{1 \le n_1 < \ldots < n_k \le n_{k+1} < \ldots < n_M \le N\}$ с гр. усл.

$$\begin{cases} \Psi(\ldots, n, n, \ldots) + \Psi(\ldots, n+1, n+1, \ldots) - 2\Delta\Psi(\ldots, n, n+1, \ldots) = 0 & \text{(B.C.)} \\ \Psi(n_1, \ldots, n_M) = \Psi(n_2, \ldots, n_M, n_1 + N) & \text{(P.B.C.)} \end{cases}$$

Собственная ф-я

$$\psi(n|z) = \sum_{\sigma\in S_M} A_\sigma z^{\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_M} A_\sigma e^{ip\cdot\sigma(n)}, \text{ где}$$

$$z = (z_1, \dots, z_M) = (e^{ip_1}, \dots, e^{ip_M}) \qquad \sigma(n) = (n_{\sigma_1}, \dots, n_{\sigma_M})$$

Собств. значение $E = \sum_{i=1}^{M} \varepsilon(p_i) = 2\sum_{i=1}^{M}(\cos p_i - \Delta)$

$$(B.C.) \Rightarrow \quad \frac{A_{\dots ij \dots}}{A_{\dots ji \dots}} = S(z_j, z_i)$$

$$(P.B.C.) \Rightarrow \quad z_i^N = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M} S(z_j, z_i) = (-1)^{M-1} \prod_{i\neq j=1}^{M} \frac{1-2\Delta z_i + z_i z_j}{1-2\Delta z_j + z_i z_j}$$

$i = 1, \dots, M$

Мы получили систему M ур-й Бете, которым должны удовлетворять параметры $z_1, \dots, z_M$, чтобы вектора вида $|\psi\rangle = \sum \psi(n, z)\,|n\rangle$ были собственными векторами $H^{\Delta}_{XXZ_0}$

Замена переменных:

$z \to x \to \alpha$, $S(z_1, z_2) = \tilde{S}(x_1/x_2) = \tilde{S}(\alpha_1 - \alpha_2)$

Вспомним, что $\Delta = -\operatorname{ch}\lambda \quad -2\Delta = e^{\lambda} + e^{-\lambda}$,

$$z = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\frac{1-2\Delta z_2 + z_1 z_2}{1-2\Delta z_1 + z_1 z_2} = \frac{1 - 2\Delta \frac{ax_2+b}{cx_2+d} + \frac{ax_1+b}{cx_1+d}\frac{ax_2+b}{cx_2+d}}{1-2\Delta\frac{ax_1+b}{cx_1+d} + \frac{ax_1+b}{cx_1+d}\frac{ax_2+b}{cx_2+d}} = \frac{(cx_1+d)(cx_2+d) - 2\Delta(ax_2+b)(cx_1+d) + (ax_1+b)(ax_2+b)}{x_1 \leftrightarrow x_2}$$

$(cx_2+d)(cx_1+d)-2\Delta(ax_2+b)(cx_1+d)+(ax_1+b)(ax_2+b) = (d^2-2\Delta bd+b^2)+x_1(cd-2\Delta cb+ab)+$

$+x_2(cd-2\Delta ad+ab)+x_1x_2(c^2-2\Delta ac+a^2)$

Оставим в числителе и знаменателе $S(z_1,z_2)$ части

линейные по x_1, x_2: $d^2-2\Delta bd+b^2=0 \quad 1-2\Delta\left(\frac{b}{d}\right)+\left(\frac{b}{d}\right)^2=0$

$c^2-2\Delta ac+a^2=0 \quad 1-2\Delta\left(\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}\right)^2=0$

решение ур-я $1-2\Delta x+x^2=0$: $x=-e^{\pm\lambda}$.

Пусть $\frac{b}{d}=-e^{-\lambda} \qquad \frac{a}{c}=-e^{\lambda}$

$$S(z_1,z_2) = -\frac{x_1(1-(e^{-\lambda}+e^{\lambda})e^{-\lambda}+1)+x_2(1-(e^{-\lambda}+e^{\lambda})e^{\lambda}+1)}{x_1\leftrightarrow x_2} =$$

$$-\frac{x_1(1-e^{-2\lambda})+x_2(1-e^{2\lambda})}{x_2(1-e^{-2\lambda})+x_1(1-e^{2\lambda})} = -\frac{x_1e^{-\lambda}-x_2e^{\lambda}}{x_2e^{-\lambda}-x_1e^{\lambda}} \overset{q=e^{\lambda}}{=} -\frac{x_1-q^2x_2}{x_2-q^2x_1}$$

Пусть $a=d=1 \qquad b=-e^{-\lambda}=c$

$$z_i = \frac{x-e^{-\lambda}}{-e^{-\lambda}x+1} = \frac{e^{\lambda}x-1}{x-e^{\lambda}}$$

при $\Delta<-1$ $\qquad x=e^{\alpha} \qquad z_i = \frac{e^{\lambda+\alpha}-1}{e^{\alpha}-e^{\lambda}} = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\lambda+\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha-\lambda}{2}\right)}$

ур-е Бете:
$$\left(\frac{qx_i-1}{x_i-q}\right)^N = (-1)^{M-1}\prod_{j\neq i}\frac{x_j-q^2x_i}{x_i-q^2x_j}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{\lambda+\alpha_i}{2}}{\operatorname{sh}\frac{\alpha_i-\lambda}{2}}\right)^N = (-1)^{M-1}\prod_{j\neq i}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_j-\alpha_i}{2}-\lambda\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_i-\alpha_j}{2}-\lambda\right)}$$

Алгебраический анзац Бете для шестивершинной модели.

1) Вспомним, что матрица монодромии

$M_0(u) = R_{01}(u) \ldots R_{0N}(u) : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}'$ удовлетворяет

RTT соотношению:

$$R_{12}(u'-u) M_1(u') M_2(u) = M_2(u) M_1(u') R_{12}(u'-u)$$

Выпишем явно в матричном виде структуру $M_0(u)$ во вспомогательном пространстве

$$M_0(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix} \qquad A(u), B(u), C(u), D(u) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

Тогда RTT соотношение запишется в виде

$$R(u'-u) \cdot \begin{pmatrix} A(u') & B(u') \\ C(u') & D(u') \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A(u') & B(u') \\ C(u') & D(u') \end{pmatrix} R(u'-u)$$

Получим:

$$\begin{pmatrix} a & & & \\ & b & c & \\ & c & b & \\ & & & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A'A & A'B & B'A & B'B \\ A'C & A'D & B'C & B'D \\ C'A & C'B & D'A & D'B \\ C'C & C'D & D'C & D'D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & AB' & BA' & BB' \\ AC' & AD' & BC' & BD' \\ CA' & CB' & DA' & DB' \\ CC' & CD' & DC' & DD' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & & & \\ & b & c & \\ & c & b & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

где для краткости мы использованы обозначения

$A = A(u)$, $A' = A(u')$, ... $D = D(u)$, $D = D(u')$, и

$a = a(u'-u)$, ..., $d = d(u'-u)$.

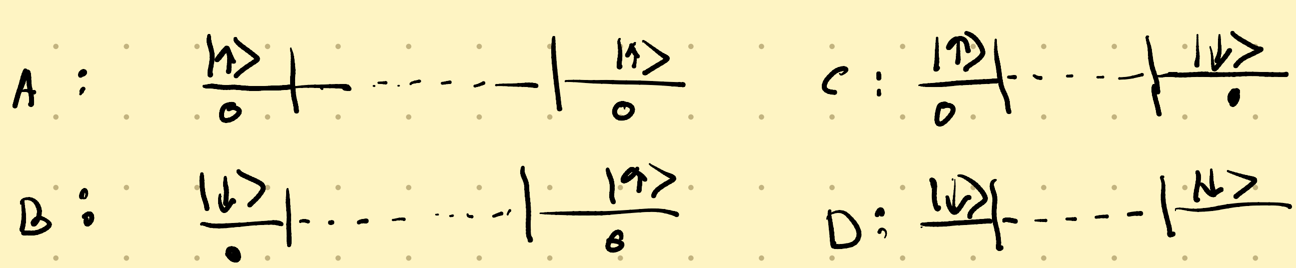
Получим 16 операторных соотношений.

Выпишем некоторые из них:

$[A(u), A(u')] = 0$, $[B(u), B(u')] = 0$, $[C(u), C(u')] = 0$, $[D(u), D(u')] = 0$

(1,3) $a B' A = c A B' + b B A'$ (2,4) $b B' D + c D' B = a B D'$

Смысл операторов A, B, C, D



$T(u) = tr_0 M_0(u) = A(u) + D(u)$.

Возьмем снова в качестве вакуума вектор

$| \rangle = |\uparrow\rangle \otimes \cdots \otimes |\uparrow\rangle$.

Вектор $|\rangle$ собственный для $A(u)$ и $B(u)$

$$A(u)|\rangle = a^N(u)|\rangle \qquad D(u)|\rangle = b^N(u)|\rangle$$

Т. к. $D(u)$ и $A(u)$ сохраняют число стрелок вверх

$$[S_z, T(u)] = 0$$

Построим собственные векторы $T(u)$ в секторе $S_z = 1-2M$, т.е. $N_\downarrow = M$, в виде

$$|\Psi_u\rangle = B(u_1)\cdots B(u_M)|\rangle$$

Выясним когда этот вектор собств для $T(u) = A(u) + D(u)$, воспользовавшись соотн.

$$aB'A = cAB' + bBA' \qquad bB'D + cD'B = aBD'$$

$$AB' = \frac{a}{c}B'A - \frac{b}{c}BA' \qquad D'B = \frac{a}{c}BD' - \frac{b}{c}B'D$$

$$A(u)B(u_1)\dots B(u_M)|\rangle = \frac{a(u_1-u)}{c(u_1-u)}B(u_1)A(u)B(u_2)\dots B(u_M)|\rangle$$

$$-\frac{b(u_1-u)}{c(u_1-u)}B(u)A(u_1)B(u_2)\dots B(u_M)|\rangle =$$

$$= a^N(u)\prod_{i=1}^{M}\frac{a(u_i-u)}{c(u_i-u)}B(u_1)\dots B(u_M)|\rangle + \sum_{k=1}^{M} a^N(u_k)\cdot\Lambda_k(u|u_1\dots u_N)\cdot$$

$$B(u)\prod_{i\neq k}B(u_i)|\rangle$$

$$D(u) B(u_1) \dots B(u_M) | \rangle = \frac{a(u-u_1)}{c(u-u_1)} B(u_1) D(u) B(u_2) \dots B(u_M) | \rangle$$

$$- \frac{b(u-u_1)}{c(u-u_1)} B(u) D(u_1) \quad B(u_2) \dots B(u_M) | \rangle =$$

$$= b(u)^N \prod_{i=1}^{M} \frac{a(u-u_i)}{c(u-u_i)} B(u_1) \dots B(u_M) + \sum_{k=1}^{M} b(u_k)^N \tilde{\Lambda}_k(u, u_1, \dots u_M) B(u) \prod_{i \neq k} B(u_i) | \rangle$$

Чтобы искомый вектор был собственным первые слагаемые из должны остаться, а остальные сократиться. В силу симметричности левой части по $u_1, \dots, u_M$ достаточно вычислить Λ_1 и $\tilde{\Lambda}_1$ и потребовать, чтобы чтобы выполнялось равенство .

$$a^N(u_1) \Lambda_1(u|\bar{u}) + b^N(u_1) \tilde{\Lambda}_1(u|\bar{u}) = 0$$

$$\Lambda_1(u, \bar{u}) = \prod_{k \neq 1} \frac{a(u_k - u_1)}{c(u_k - u_1)} \frac{b(u_1 - u)}{c(u_1 - u)}$$

$$\tilde{\Lambda}_1(u, \bar{u}) = \prod_{k \neq 1} \frac{a(u_1 - u_k)}{c(u_1 - u_k)} \frac{b(u-u_1)}{c(u-u_1)}$$

Подставим $a(u) = 1$ $\quad b(u) = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{sh}(\lambda - u)}$ $\quad c(u) = \frac{\operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{sh}(\lambda - u)}$

В результате получим:

$$\Lambda(u) = \prod_{i=1}^{M} \frac{sh(\lambda - u_i + u)}{sh\lambda} + \left(\frac{sh\,u}{sh(\lambda-u)}\right)^N \prod_{i=1}^{M} \frac{sh(\lambda - u + u_i)}{sh\lambda}$$ – собств.

значение $T(u)$, при условии

$$\prod_{i\neq k} \frac{c(u_k - u_i)}{c(u_i - u_k)} = b^N(u_k) \Rightarrow \prod_{i\neq k} \frac{sh(\lambda - u_k + u_i)}{sh(\lambda - u_i + u_k)} = \left(\frac{sh\,u_k}{sh(\lambda - u_k)}\right)^N$$

Сравнить с ур-ями Бете, полученными из координатного анзаца после замены $u_k = \frac{\alpha_k + \lambda}{2}$, а также $\left.\frac{\partial \ln E}{\partial u}\right|_{u=0}$ с энергией H^{Δ}_{xxz}.
