

Семинар 15

Отображение Веронезе $v_{2,2} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$.

Пусть V — это 3-мерное векторное пространство с базисом e_0, e_1, e_2 и координатами x_0, x_1, x_2 , а $W = S^2 V^*$ — 6-мерное пространство квадратичных форм от переменных x_0, x_1, x_2 , и отображение $v_{2,2} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W^*)$ сопоставляет каждому вектору $v \in V$ линейную форму на W , значение которой на форме $F \in W$ есть $F(v)$. Образ этого отображения $X = v_{2,2}(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$ называется *поверхностью Веронезе*.

Задача 1. [Сечения поверхности X гиперплоскостями — это нули квадратичных форм.]

Покажите, что имеется биекция между гиперплоскостями в $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(W^*)$ и квадратичными формами (с точностью до ненулевого множителя) из W , при котором пересечение поверхности X с гиперплоскостью, соответствующей форме F , это в точности образ (при отображении $v_{2,2}$) коники, задаваемой на плоскости формой F . Выведите из этого, что

- (1) X не содержится ни в какой гиперплоскости и даже ни в каком проективном подпространстве $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^5$;
- (2) X — это поверхность степени 4.

Задача 2. [Координатное задание отображения Веронезе.]

- (1) В координатах квадратичная форма $F \in W$ задается формулой $F(x) = \sum a_{ij} x_i x_j$, то есть симметрической 3×3 -матрицей $A = (a_{ij})$, обозначим двойственные координаты в пространстве W^* через z_{ij} . Покажите, что тогда отображение Веронезе $v_{2,2}$ задается формулами $z_{ij} = x_i x_j$.
- (2) Покажите, что отображение Веронезе $v_{2,2}$ инъективно.
- (3) Покажите, что X содержится в пересечении квадратик в $\mathbb{P}^5$, задаваемых уравнениями $z_{ij} z_{pq} = z_{iq} z_{pj}$, где $i, j, p, q \in \{0, 1, 2\}$.
- (4) Покажите, что X совпадает с пересечением квадратик из предыдущего пункта. [Пусть $Y \subset \mathbb{P}^5$ — пересечение квадратик $z_{ij} z_{pq} = z_{iq} z_{pj}$, и пусть $\mathbb{A}_{i,j} \subset \mathbb{P}^5$ — аффинная карта, задаваемая условием $z_{ij} \neq 0$. Придумайте отображения $\psi_{ij} : Y \cap \mathbb{A}_{i,j} \rightarrow \mathbb{P}^2$, такие что $v_{2,2} \circ \psi_{ij} = \text{Id}_{Y \cap \mathbb{A}_{i,j}}$.]

Задача 3. [Двойственная поверхность Веронезе в двойственном пространстве $\check{\mathbb{P}}^5$.]

- (1) Напомним (см. задачу 1), что гиперплоскости в $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(W^*)$ — это (с точностью до пропорциональности) квадратичные формы на V . Покажите, что множество квадратичных форм $F \in W$, являющихся квадратом некоторой линейной формы ($F = L^2$), образует в $\check{\mathbb{P}}^5$ поверхность, изоморфную поверхности Веронезе X . Мы будем обозначать ее через $\check{X}$. Таким образом, $\check{X}$ состоит из гиперплоскостей в $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(W^*)$, пересекающих X двукратно по конике — образе двукратной прямой на плоскости $\mathbb{P}^2$ при отображении Веронезе.
- (2) Напомним, что для квадратичной формы $F \in W$ имеется инвариантно определенное понятие ранга, причем определенная в предыдущем пункте поверхность $\check{X}$ состоит в точности из квадратичных форм ранга 1. Множество же вырожденных квадратичных форм (т.е. ранга 1 или 2) называется *кубическим симметроидом*, обозначим ее через $\check{N} \subset \check{\mathbb{P}}^5$. Покажите, что $\check{N}$ является гиперповерхностью степени 3 в $\check{\mathbb{P}}^5$.
- (3) Прямые в $\check{\mathbb{P}}^5$ — это пучки коник. Покажите, что $\check{N}$ — это хордовое многообразие для $\check{X}$, т.е. геометрическое место точек, лежащих на хордах поверхности $\check{X}$.
- (4) Покажите, что $\check{X}$ — это в точности множество особых точек гиперповерхности $\check{N}$.