

Семинар 29

Элементы геометрии вещественного векторного пространства, снабженного невырожденным скалярным произведением сигнатуры $(n,1)$ (n плюсов и один минус).

Имя такому пространству $E^{(n,1)}$

1. Подпространство $W \in E^{(n,1)}$ называется эллиптическим (соответственно параболическим, гиперболическим), если ограничение на него скалярного произведения положительно определено (соответственно, положительно полуопределено и вырожденно, неопределено). Доказать, что любое подпространство в $E^{(n,1)}$ является пространством одного из трех указанных типов.
2. Доказать, что ортогональное дополнение к эллиптическому (соответственно параболическому, гиперболическому) подпространству есть гиперболическое (соответственно параболическое, эллиптическое) подпространство.
3. Как эти три типа подпространств могут быть охарактеризованы своим расположением относительно конуса изотропных векторов (конус Лоренца)?
4. Через L_+^0 обозначим одну из связных компонент внутренности $\{x \in E^{(n,1)} | (x, x) < 0\}$ конуса Лоренца. Докажите, что скалярное произведение любых двух векторов из L_+^0 отрицательно.
5. Пусть $a, b \in L_+^0, a^2 = b^2 = -1$. Доказать, что скалярное произведение $(a, b) < -1$ (оправдание странной формулы для метрики в векторно-проективной модели геометрии Лобачевского).

Элементарная планиметрия (проективная модель в диске)

Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

6. Через любые две точки проходит единственная прямая. Через точку вне прямой проходит единственная прямая, параллельная данной. Число попарно непересекающихся полуплоскостей конечно.
7. Существует единственный перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную точку.
8. Две прямые непересекаются тогда и только тогда, когда у них есть общий перпендикуляр. Такой перпендикуляр всегда один.
- 9*. Сумма углов треугольника не равна 180 градусам.
10. Внутри любого угла содержится некоторая прямая.