

Избранные главы дискретной математики. Весна 2025г

Задача с последних двух занятий.

Эти задачи предполагается обсудить на ближайшем занятии. Некоторые из этих утверждений могут пригодиться при выполнении четвертого ИДЗ.

- (1) Докажите, что булева функция монотонна тогда и только тогда, когда в ее сокращенной ДНФ нет отрицаний.
- (2) Докажите, что непостоянная линейная функция принимает значения 0 и 1 одинаковое число раз.
- (3) Докажите, что у монотонной булевой функции сокращенная ДНФ является ее единственной тупиковой ДНФ.
- (4)
 - а) Покажите, что функция, двойственная к монотонной булевой функции, также монотонна. (Напомним, что функцией, двойственной к булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется функция $f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$)
 - б) Покажите, что если f и g — булевы функции, то $(f \vee g)^* = f^* \wedge g^*$ и $(f \wedge g)^* = f^* \vee g^*$. Является ли множество монотонных булевых функций булевой алгеброй относительно операций $\vee$, $\wedge$ и $*$? Если нет, то какая аксиома булевой алгебры не выполняется?
- (5) Мы доказали теорему Поста, утверждающую, что система функций является полной тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном из пяти замкнутых классов T_0 , T_1 , L , S и M . Покажите, что эти пять замкнутых классов являются максимальными замкнутыми классами функций, то есть что любой собственный замкнутый класс функций содержится в одном из этих пяти.