# Избранные главы дискретной математики. Весна 2025г

## Задача с последнего занятия.

(1) [Связные графы с цикломатическим числом 1.] Покажите, что существует единственный связный граф $\Gamma$ с паспортом $(2, 2, \ldots, 2)$ (все $n \geq 1$ вершин имеют валентность 2). Назовем такой граф простым циклом; у него, очевидно, $g(\Gamma) = 1$. Докажите, что любой связный граф с цикломатическим числом 1 получается из некоторого простого цикла посадкой[1] некоторых деревьев в некоторые вершины этого цикла.

(2) На занятии мы обсуждали производящие ряды для трехвалентных графов с $2n$ вершинами:

$$\Psi(x) = \sum_{n>0} \sum_{\substack{\text{Все трехвалентные} \\ \text{графы } \Gamma, \\ \text{имеющие } 2n \text{ вершин}}} \frac{1}{|\operatorname{Aut}\Gamma|} x^n$$

и

$$\Phi(x) = \sum_{n>0} \sum_{\substack{\text{Все трехвалентные} \\ \text{связные графы } \Gamma, \\ \text{имеющие } 2n \text{ вершин}}} \frac{1}{|\operatorname{Aut}\Gamma|} x^n$$

Покажите, что $1 + \Psi(x) = \exp(\Phi(x))$. [Для этого покажите, что $\frac{\Phi(x)^m}{m!}$ является производящим рядом для графов, имеющих ровно $m$ компонент связности; на занятии мы проследили за каждым слагаемым в случае $m = 2$.]

(3) Перечислите все (с точностью до изоморфизма) связные трехвалентные графы с 4 вершинами (мы на занятии указали один из них — полный граф на 4 вершинах), и докажите полноту этого списка, вычислив

$$\sum_{\substack{\text{Все трехвалентные} \\ \text{связные графы } \Gamma, \\ \text{имеющие } 4 \text{ вершины}}} \frac{1}{|\operatorname{Aut}\Gamma|}$$

и сравнив результат с соответствующим коэффициентом ряда $\Phi(x) = \log(1 + \Psi(x)) = \Psi(x) - \frac{\Psi(x)^2}{2} + \frac{\Psi(x)^3}{3} - \ldots$, пользуясь вычисленным на занятии рядом $\Psi(x) = \sum_{n>0} \frac{(6n)!}{(2n)!(3n)!288^n} x^n$.

---

[1] Дадим формальное определение того, что значит "посадить дерево $\Delta$ в вершину $v_0$ графа $\Gamma$". Напомним, что мы обсуждали задание графа следующим набором объектов: множество вершин, множество ориентированных ребер с инволюцией изменения ориентации ребра, и отображение $t : \overrightarrow{E} \to V$, сопоставляющее ориентированному ребру вершину, в которое оно указывает.

Пусть $\Gamma$ — некоторый граф, $\Delta$ — некоторое дерево, $t_\Gamma : \overrightarrow{E}(\Gamma) \to V(\Gamma)$ и $t_\Delta : \overrightarrow{E}(\Delta) \to V(\Delta)$ — задающие их отображения. Пусть $v_0 \in V(\Gamma)$ и $u_0 \in V(\Delta)$ — две отмеченные вершины. (Дерево с отмеченной вершиной часто называют *корневое дерево*, а его отмеченную вершину — *корнем*.) Определим новый граф $\Sigma$, множеством ориентированных ребер которого является объединение $\overrightarrow{E}(\Sigma) = \overrightarrow{E}(\Gamma) \cup \overrightarrow{E}(\Delta)$, а множество вершин $V(\Sigma) = ((V(\Delta) \cup V(\Delta)) \setminus \{u_0, v_0\}) \cup \{w_0\}$, где $w_0 \notin V(\Gamma)$ и $w_0 \notin V(\Delta)$ — т.е $w_0$ это "новая" вершина, которая должна оказаться "склейкой" вершин $u_0$ и $v_0$. Для этого определим отображение $t_\Sigma : \overrightarrow{E}(\Sigma) \to V(\Sigma)$, задающее граф $\Sigma$, как композицию $t_\Sigma = \varphi \circ (t_\Gamma \cup t_\Delta)$, где $(t_\Gamma \cup t_\Delta) : \overrightarrow{E}(\Gamma) \cup \overrightarrow{E}(\Delta) \to V(\Gamma) \cup V(\Delta)$ — естественное отображение объединения, а $\varphi : V(\Gamma) \cup V(\Delta) \to V(\Sigma)$ — отображение "склейки", определяемое тем, что $\varphi(x) = x$ при $x \neq u_0$ и $x \neq v_0$, и $\varphi(u_0) = \varphi(v_0) = w_0$. Т.е. все ориентированные ребра, которые раньше вели в вершины $u_0$ и $v_0$, теперь указывают в вершину $w_0$.