Семинар 30

Планиметрия Лобачевского в векторно-проективной модели

Если сторона треугольника обозначена буквой c (соотв. a, b), то это значит, что ее длина равна c , а противолежащий угол равен C (соотв. A, B). Все координаты заданы в каноническом базисе псевдо-евклидова пространства сигнатуры $(2, 1)$.

1. Рассмотрим треугольник со сторонами 3, 4, 5. Найти его высоты.

2. Сформулировать и доказать все признаки равенства треугольников, известные вам из школьной планиметрии.

3. Через h_a обозначим длину высоты на сторону a . Доказать, что произведение $\operatorname{sh} h_a \operatorname{sh} a$ не зависит от выбора стороны треугольника.

4. Длина общего перпендикуляра к расходящимся прямым реализует расстояние между ними. Доказать.

5. Длина общего перпендикуляра к расходящимся прямым равна 1. На одной из них выбрали точку на расстоянии 2 от основания общего перпендикуляра. Чему равно расстояние от выбранной точки до второй прямой?

6. Найти углы прямоугольного треугольника, у которого один из катетов параллелен гипотенузе, а длина другого равна 1.

7. Ортогональная проекция одной из двух расходящихся прямых на другую является отрезком конечной длины (почему?). Найти его длину, если расстояние между прямыми равно 1.

8. Даны два треугольника со сторонами a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 соответственно. Известно, что $a_1 = a_2, b_1 = b_2$. Доказать, что

а) $c_1 > c_2 \leftrightarrow C_1 > C_2$;

б)* $c_1 > c_2 \leftrightarrow (A_1 + B_1) < (A_2 + B_2)$.

9*. Доказать, что в треугольнике со сторонами ta, tb, tc каждый угол монотонно стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

10*. Попробуйте доказать, что сумма углов треугольника меньше, чем π .