Семинар 16.

Полярное отображение. Формулы Плюккера

Всюду в этом параграфе, кромк задачи 1, основное поле $\mathbf{k}$ считается алгебраически замкнутым.

1. Полярное отображение.

Определение. *Пусть $X = V(F)$ - гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, где $F = F(x_0, ..., x_n)$ - однородный многочлен.* ***Полярным отображением*** *(или* ***отображением линейным рядом поляр****) называется рациональное отображение*

$$p_X: \ \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n\vee}, \ (x_0 : ... : x_n) \mapsto (\frac{\partial F}{\partial x_0} : ... : \frac{\partial F}{\partial x_n}). \tag{1}$$

Замечание. Согласно определению, полярное отображение, определенное формулой (1), зависит от выбора координат $(x_0 : ... : x_n)$ в $\mathbb{P}^n$ и, соответственно, двойственных координат $(y_0 : ... : y_n)$ в $\mathbb{P}^{n\vee}$. Однако, нетрудно видеть, что при замене координат $\rho\tilde{x}_i = A_{ij}x_j$ в $\mathbb{P}^n$ и соответствующей замене двойственных координат $\rho\tilde{y}_i = B_{ij}y_j$ в $\mathbb{P}^{n\vee}$, где $B = (B_{ij}) = A^{-1}$, а $A = (A_{ij})$, полярное отображение задается той же формулой (1), в которой x_i заменены на $\tilde{x}_i$. Это означает, что полярное отображение определено корректно. $\square$

Предположим, что гиперповерхность X неособа. Тогда полярное отображение p_X регулярно (то есть определено во всех точках пространства $\mathbb{P}^n$).

Определение. ***Двойственным многообразием*** *к гиперповерхности X в $\mathbb{P}^n$ называется замыкание $\check{X}$ в $\check{\mathbb{P}}^n$ множества $\{H \in \check{\mathbb{P}}^n \mid H = \mathbb{T}_xX, \ x \in X \smallsetminus \mathrm{Sing}X\}$.*

Теорема. (См. [Дж. Харрис. Алгебраическая геометрия. Начальный курс.].) *Пусть* $\mathrm{char}\mathbf{k} = 0$ *и X - неприводимая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, то есть $X = V(F)$, где F – неприводимый однородный многочлен (форма) степени $\mathbf{d} > 1$ от $x_0, ..., x_n$. Тогда справедлив следующий* ***принцип двойственности****:*

$$\check{\check{X}} = X.$$

Если при этом X неособа, то $\check{X}$ - неприводимая гиперповерхность в $\check{\mathbb{P}}^n$ и отображение $p_X : \ X \to \check{X}$ бирационально, то есть биективно на открытом подмножестве в X. А именно, обратное к нему отображение также бирационально и является полярным отображением:

$$p_X^{-1} = p_{\check{X}} : \ \check{X} \overset{\mathrm{bir}}{\dashrightarrow} \check{\check{X}} \simeq X.$$

Задача 1. $y = f(x), \ x \in (a, b),$ – произвольная выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая вещественнозначная функция на интервале (a, b) (выпуклость означает, что $y''(x)$ имеет постоянный знак на (a, b)), и пусть гладкая кривая X есть график этой функции. Докажите прямым вычислением, что $\check{X}$ – также гладкая кривая, и для X справедлив принцип двойственности $\check{\check{X}} = X$.

Пусть X – гладкая кривая в $\mathbb{P}^2$ степени $\mathbf{d} = \deg X > 1$. Рассмотрим полярное отображение $p_X : X \to \check{\mathbb{P}}^2$. Согласно теореме $\check{X} = p_X(X)$ есть неприводимая кривая в $\check{\mathbb{P}}^2$. Из неприводимости кривой $\check{X} = p_X(X)$ следует, что кривая $\check{X}$ имеет не более, чем конечное число особых точек. (Это следствие локального вычисления, показывающего, что образ при полярном отображении (гладкого) ростка кривой X в окрестности точки на X, не являющейся точкой перегиба, является гладким ростком кривой $\check{X}$.) Пусть $(y_0 : y_1 : y_2)$ – однородные координаты в $\check{\mathbb{P}}^2$. Проверяется, что для общей точки $a = (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2$ прямая $l = \{a_0y_0 + a_1y_1 + a_2y_2 = 0\}$ в $\check{\mathbb{P}}^2$ пересекает кривую $\check{X}$ трансверсально в конечном числе точек $b_1, ..., b_n$, где $n = \deg \check{X}$. Отсюда по формулам полярного отображения следует, что точки $a_i = p_X^{-1}(b_i), \ i = 1, ..., n$ являются точками трансверсального пересечения кривой X с полярой $P_a(X)$ точки a:

$$X \pitchfork P_a(X) = \bigsqcup_{i=1}^{n} a_i.$$

Отсюда по теореме Безу получаем $n = \deg X \deg P_a(X) = \mathbf{d}(\mathbf{d}-1)$. Вывод:

$$\deg \check{X} = \deg X(\deg X - 1) = \mathbf{d}(\mathbf{d}-1). \tag{2}$$

Задача 2. Пусть X - кривая в $\mathbb{P}^2$, имеющая обыкновенную двойную точку b. Как мы знаем из свойств поляр, для любой точки $a \in \mathbb{P}^2$ поляра $P_a(X)$ проходит через точку b. Докажите, что для общей точки $a \in \mathbb{P}^2$ кратность пересечения в точке b кривых X и $P_a(X)$ равна 2:

$$(X \cdot P_a(X))_b = 2.$$

Определение. ***Обыкновенным острием*** *на кривой X называется особая точка $a \in X$, в окрестности которой в подходящих аффинных координатах (x, y) уравнение кривой X имеет вид*

$$y^2 = \lambda x^3 + [4], \quad \lambda \in \mathbf{k}^*, \tag{3}$$

где $[4]$ означает члены порядка $\geqslant 4$ по x, y. При этом $l = \{y = 0\}$ - единственная прямая через точку a, для которой $(l \cdot X)_a = 3$. Эту прямую назовем ***выделенной касательной*** *к X в острие a.*
Гладкая точка перегиба $a \in X$ называется ***точкой простого перегиба****, если кратность пересечения X с касательной $\mathbb{T}_a X$ в точке a равна 3:*

$$(X \cdot \mathbb{T}_a X)_a = 3.$$

Замечание. 1) Уравнение (3), строго говоря, написано не в кольце многочленов $\mathbf{k}[x, y]$, а в кольце формальных степенных рядов $\mathbf{k}[[x, y]]$.
2) Если вместо уравнения (3) взять модифицированное уравнение $y^2 = \lambda x^3 + \mu x^2 y + \nu x y^2 + \theta y^3 + [4]$, где $\lambda \in \mathbf{k}^*$, $\mu, \nu, \theta \in \mathbf{k}$, то нетрудно проверить с учетом того, что $\lambda \neq 0$, что невырожденным преобразованием в $\mathbf{k}[[x, y]]$ (!) можно привести это уравнение к виду (3).

Задача 3. (1) Докажите, что образ на двойственной кривой $\check{X}$ точки простого перегиба на X является обыкновенным острием.
(2) Докажите обратное утверждение

Замечание. Пусть кривая X степени $\mathbf{d}$ имеет только точки простого перегиба $a_1, ..., a_\gamma$. Как и в случае кубической кривой проверяется прямым вычислением, что тогда гессиан $He(X)$ кривой X неособ в каждой точке a_i и пересекает X трансверсально в ней. Отсюда, пользуясь тем, что $\deg He(X) = 3(\mathbf{d}-2)$, по теореме Безу находим число γ точек перегиба кривой X:

$$\gamma = 3\mathbf{d}(\mathbf{d}-2).$$

Определение. ***Простой двойной касательной прямой*** *к кривой X называется прямая l в $\mathbb{P}^2$, имеющая с X простое касание (то есть касание с кратностью 2) в двух различных гладких точках $a_1, a_2 \in X$ и не имеющая других точек касания с X.*

Задача 4. (1) Докажите, что образ на двойственной кривой $\check{X}$ точек простого касания простой двойной касательной прямой l к X есть обыкновенная двойная точка $\check{l} \in \check{X}$, такая, что $(l_i \cdot \check{X})_{\check{l}} = 3$, $i = 1, 2$, где l_1 и l_2 – касательные прямые к двум ветвям кривой $\check{X}$ в точке $\check{l}$.
(2) Докажите обратное утверждение.

Задача 5. (формула Плюккера) Пусть неприводимая кривая X степени $\mathbf{d} > 1$ в $\mathbb{P}^2$ имеет в качестве особенностей только δ обыкновенных двойных точек и κ простых острий. Выведите из предыдущих задач, что степень двойственной кривой $\check{X}$ находится по формуле Плюккера

$$\deg \check{X} = \mathbf{d}(\mathbf{d}-1) - 2\delta - 3\kappa. \tag{4}$$

Задача 6. Пусть X - гладкая кривая степени $\mathbf{d} \geqslant 4$ в $\mathbb{P}^2$, имеющая, помимо обычных касательных прямых, еще $\check{\delta}$ простых двойных касательных, и пусть она имеет в качестве точек перегиба только точки простого перегиба. Воспользовавшись ранее полученными формулами покажите, что число $\check{\delta}$ простых двойных касательных кривой X находится по формуле

$$\check{\delta} = \frac{\mathbf{d}(\mathbf{d}-2)(\mathbf{d}^2-9)}{2}. \tag{5}$$

Замечание. В частности, отсюда следует, что общая гладкая плоская кривая степени 4 (квартика) имеет 28 простых двойных касательных прямых.