Избранные главы дискретной математики. Весна 2025г

Задачи с последнего занятия.

(1) Напомним, что мы определили два инварианта связного графа Γ: *число реберной связности* $\lambda(\Gamma)$ и *число вершинной связности* $\kappa(\Gamma)$ следующим образом. Натуральное число $\lambda(\Gamma)$ (соответственно, $\kappa(\Gamma)$) это наименьшее число ребер (соответственно, вершин вместе с инцидентными им ребрами) при удалении которых граф становится несвязным или одной вершиной без ребер. Было рассказано "почти доказательство" неравенства $\lambda(\Gamma) \geq \kappa(\Gamma)$, не проходящее в случае, когда все вершины графа оказались инцидентны разделяющему набору из $\lambda(\Gamma)$ ребер. Доделайте это доказательство или придумайте другое.

(2) Назовем m-разрезом набор из m различных ребер связного графа Γ, удаление которых делает граф несвязным.

а) Пусть Γ — связный граф с $\lambda(\Gamma) = 2$. Введем на $V(\Gamma)$ отношение эквивалентности так: две вершины назовем эквивалентными, если их можно соединить путем, не проходящим через 2-разрез. Покажите, что после удаления всех ребер, входящих в хотя бы один 2-разрез, граф развалится в несвязное объединение нескольких связных графов $\coprod \Gamma_i$, таких что множества вершин $V(\Gamma_i)$ это в точности классы эквивалентности, и $\lambda(\Gamma_i) > 2$.

б) Покажите, что если в условиях предыдущего пункта стянуть каждый класс эквивалентности в одну вершину, то получится граф $\overline{\Gamma}$, такой что $\lambda(\overline{\Gamma}) = 2$ и любое ребро графа $\overline{\Gamma}$ входит хотя бы в один 2-разрез.

в) Докажите, что такие графы с $\lambda = 2$, у которых любое ребро входит хотя бы в один 2-разрез, допускают следующее описание. Берем произвольное дерево Δ с вершинами $V(\Delta) = \{u_1, \ldots, u_m\}$ и набор простых циклов[1] $C_1, \ldots, C_m$, и каждому ребру e дерева Δ, соединяющего вершины u_i и u_j из $V(\Delta)$, сопоставим пару вершин $v_{i,e} \in V(C_i)$ и $v_{j,e} \in V(C_j)$. Итоговый граф Γ получается из несвязного объединения $\coprod C_i$ склеиванием пар вершин $v_{i,e}$ и $v_{j,e}$ для каждого ребра $e \in E(\Delta)$.

(3) Приведите пример негамильтонова трехвалентного графа Γ, у которого $\lambda(\Gamma) = 3$.

(4) Напомним, что потоком на графе Γ называется кососимметрическая функция $x : \overrightarrow{E}(\Gamma) \to \mathbb{R}$ (т.е. такая, что $= -x(\overleftarrow{e})$ для любого ориентированного ребра $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}(\Gamma)$), удовлетворяющая в каждой вершине $v \in V(\Gamma)$ уравнению Кирхгоффа:

$$\sum_{\substack{\text{Все ориентированные} \\ \text{ребра } \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}(\Gamma), \\ \text{такие что } t(\overrightarrow{e}) = v}} x(\overrightarrow{e}) = 0.$$

Мы доказали, что эти уравнения не являются независимыми: сумма уравнений Кирхгоффа для всех вершин дает равенство $0 = 0$, поэтому любое одно есть следствие остальных. Докажите, что в случае связного графа Γ других линейных соотношений между уравнениями Кирхгоффа нет.

(5) Из предыдущей задачи следует, что размерность пространства потков на связном графе Γ равна $g(\Gamma) = |E(\Gamma)| - |V(\Gamma)| + 1$ однако мы видели на примерах, что не на любых наборах из $g(\Gamma)$ ребер графа Γ можно задать значения потока произвольно с тем, чтобы значения потока на остальных ребрах можно было бы однозначно восстановить из уравнений Кирхгоффа. Придумайте чисто геометрическую характеризацию таких наборов из $g(\Gamma)$ ребер, для которых такое восстановление возможно.

[1] Определение *простого цикла* см в первой задаче предыдущего задания.