

ИТОГОВЫЙ ОТЧЕТ ПРОЕКТНОЙ ГРУППЫ (РАБОТНИКИ) за 2023-2025 годы

Тема проектной работы: Семантические и алгоритмические вопросы неклассических логик

В рамках работы группы были выполнены следующие исследования:

К.И.Александров

Было показано, что в расширениях пропозициональной базисной логики Виссера BPL для каждой степени неразрешимости (т.е. степени Тьюринга) имеется линейно аппроксимируемая логика, которая имеет ровно эту степень неразрешимости, причём её константный фрагмент тоже имеет эту же степень неразрешимости. Тем самым, алгоритмическая сложность логики, и даже её константного фрагмента, не зависит от сложности аппроксимации шкалами Крипке.

Показано, что монадические фрагменты от двух переменных предикатного варианта базисной логики Виссера QBL и суперинтуиционистской логики конечных шкал Крипке $QInt\text{-}wfin$ рекурсивно неотделимы (результат был получен с дополнительными ограничениями на высоту шкал и постоянство областей). Как следствие, все логики, лежащие между указанными двумя, имеют неразрешимый монадический фрагмент от двух предметных переменных.

По первому результату были написаны тезисы, которые были приняты на V Конференцию математических центров России.

И.А.Агаджанян

Доказана неразрешимость суперинтуиционистской предикатной логики конечных линейных шкал Крипке при двух предметных переменных в языке. В доказательстве используется одна бинарная предикатная буква и бесконечно много унарных. Результат усилен тем, что можно обойтись лишь позитивными формулами. Кроме этого была, доказана Π_1^0 -трудность этого фрагмента логики.

А.Г.Задаля

Были получены оценки сложности проблем выполнимости и общезначимости для фрагментов расширения логики CTL^* , которое получается за счёт требования рефлексивности в семантике Крипке. В частности, такие результаты получены для

аналогов LTL и CTL. Доказано, что «рефлексивная» LTL является PSPACE-полной, а «рефлексивная» CTL — EXPTIME-полной при одной пропозициональной переменной в языке. Показано, что фрагмент «рефлексивной» CTL, содержащий лишь операторы AX и EX, эквивалентен логике T, а фрагмент «рефлексивной» CTL, содержащий лишь операторы AG и EF, эквивалентен логике S4, откуда следует их PSPACE-полнота, а также PSPACE-полнота их фрагментов от одной (и более) переменной.

Н.В.Лукашов

Проблема унификации для произвольной логики L — это довольно естественный вопрос. Его можно сформулировать так: существует ли у данной формулы унификатор в L, то есть существует ли такая подстановка, делающая эту формулу теоремой логики L. В рамках проекта исследовалась проблема унификации для базовой модальной логики E, и было доказано, что она имеет конечный тип унификации. Ключевая идея состояла в рассмотрении алгебраической семантики для E, которая является ничем иным как булевыми алгебрами со свободным унарным функциональным символом, на который не накладывается никаких тождеств. Далее была явно описана алгебра Линденбаума-Тарского логики E, и отсюда получено полное конечное множество унификаторов для любой унифицируемой формулы в логики E.

П.М.Разумный

Рассматривалась логика QGL (предикатный аналог логики доказуемости Гёделя-Лёба), расширенная нефундированными выводами (QGL_{inf}). Ввиду бесконечности доказательств в данной дедуктивной системе, естественно ожидать высокий уровень алгоритмической сложности множества ее теорем.

Основной результат работы состоит в том, что был точно определён класс аналитической иерархии, в котором лежит множество теорем QGL_{inf}, им оказался класс Σ^1_1 , причём показано, что множество теорем QGL_{inf} является полным в этом классе. Для этого построено сведение к проблеме доказуемости в QGL_{inf} проблемы возможности бесконечного возвращения недетерминированной машины Тьюринга, начинающий работу на пустой ленте, в начальное состояние.

Из полученных результатов следует, что множества теорем QGL и QGL_{inf} не совпадают (в отличие от пропозиционального случая), и что QGL не полна относительно топологической семантики.

С. Г. Саакян

Исследование Степана было посвящено сильному дизъюнктивному свойству и свойству редукции в системе GLB и их обобщениям. Эта задача связана с задачей унификации и вопросом описания подалгебр алгебры рефлексии для арифметических теорий.

Доказаны обобщения сильного дизъюнктивного свойства и свойства редукции для:

$$1) \Box_0 \varphi_0 \vee \dots \vee \Box_0 \varphi_n$$

$$2) \Box_1 \varphi_0 \vee \dots \vee \Box_1 \varphi_n$$

3) $\square_0 \varphi_0 \vee \dots \vee \square_0 \varphi_n \vee \square_1 \psi_0 \vee \dots \vee \square_1 \psi_m$

Все доказательства – синтаксические, основная часть работы велась в исчислении вложенных секвенций GLB_NS, введённом Д. С. Шамкановым. В качестве приложения этих результатов была решена задача унификации формулы $\square_1 p_0 \vee \dots \vee \square_1 p_n$ в GLB.

Пыльцын И.О.

Исследовалась игровая семантика Межирова. Удалось установить аналоги многих стандартных свойств известных первопорядковых логик для логик, описываемых игровой семантикой Межирова. Естественная модификация игры Межирова позволила описать фрагмент логики нётеровых шкал Крипке, являющийся аналогом свободной интуиционистской логики первого порядка. Помимо этого, при помощи иных модификаций игровой семантики были описаны пропорциональные фрагменты нескольких первопорядковых модальных логик.

Результаты были доложены на международной конференции Australasian Association conference (ALL 2024)

Тема доклада: Mezhirov's Game for Superintuitionistic Non-Compact Logic

М.В. Козырева.

Были изучены аксиоматические полимодальные предикатные логики, получающиеся на основе логик QK, QT, QK4, QS4 и n-транзитивных логик (для каждого n), а также их семантика Крипке. Было доказано, что каждая из этих логик обладает интерполяционным свойством Линдона. В доказательстве использовался метод, предложенный Л.Л.Максимовой для мономодальных логик QK, QT, QK4 и QS4. В результате исследований этот метод был обобщён, что позволило получить сходные результаты для бесконечного класса полимодальных логик, в том числе таких, мономодальные варианты которых в исходной работе Л.Л.Максимовой не рассматривались. Полученные доказательства представляют интерес для исследований вопроса семантической полноты модальных предикатных логик. Результаты стоит опубликовать.

Б.А. Сергеевич

Изучались вопросы, связанные с исследованием свойств конкретных алгоритмов, решающих вопрос выполнимости формул логики линейного времени LTL. В процессе работы Андрей глубоко разобрался в теме, проанализировал имеющуюся литературу, реализовал известные алгоритмы проверки выполнимости LTL-формул в виде программ, оценил и сравнил их вычислительную сложность. Затем он предложил оптимизацию, обосновал её корректность и подтвердил теоретические построения на реальных вычислениях. Результатом его работы являются алгоритмы, которые превосходят по вычислительным характеристикам исходные, предложенные ранее другими исследователями. Несмотря на то, что данная работа в основном имеет прикладной характер, само исследование является фундаментальным с прикладными элементами.

В.Ю. Кокин

Владислав доказал теорему об полноте для модальной логики Гёделя-Лёба с ограниченным сокращением в алгебраической семантике. Собрал в тексте ВКР результаты исследований модальной логики Гёделя-Лёба с ограниченным сокращением, полученные им за последние два года, он защитил выпускную работу бакалавра на "отлично".

Михеенков Георгий Алексеевич

Изучалась гибридная временная логика рациональной прямой, в которой специальные переменные служат для обозначения стандартных промежутков, например дней. Ему удалось найти аксиоматику и доказать полноту относительно стандартной модели, в которой специальные переменные оцениваются стандартными промежутками. Результат хороший и в будущем может быть опубликован.

С.А. Молин

Изучалась топологическая модальная логика топологии Зарийского. Рассматривались кольца малой размерности и модальные логики над $S4$, т.е. с рефлексивной модальностью. Степаном была предложена аксиоматика и доказана полнота относительно реляционных моделей методом канонической модели.

Все полученные результаты были доложены на НИС «Современные проблемы математической логики».

Кудинов Андрей Валерьевич, Михаил Николаевич Рыбаков и Шехтман Валентин Борисович проводили консультации со студентами, осуществляли руководство научными исследованиями и принимали участие в организации и проведении научного семинара.