

Введение в дискретную математику и топологию. Осень 2025г

Листок 1.

Листок 1 принимается до конца второй учебной недели.

Задачи можно сдавать только преподавателю своей группы или лектору. О сдаче задач студент должен договориться заранее. Перед сдачей листка студент должен объявить список задач, которые он собирается рассказать, и собранные в одном месте записи (можно краткие) этих решений. Принимающий может попросить рассказать решение некоторых из этих задач (не обязательно всех) на свой выбор. При обнаружении хотя бы одного неверного решения прием задач прекращается и может быть возобновлен только в другой день.

- (1) **Задача о кругах Эйлера.** Мы хотим расположить n связных областей $A_1, \dots, A_n$ на плоскости таким образом, чтобы они разбивали плоскость ровно на 2^n частей, отвечающих всем возможным наборам ответов на n вопросов " $x \in A_i$?", $i = 1, \dots, n$. (Такие 2^n наборов ответов удобно закодировать всевозможными последовательностями $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ нулей и единиц длины n , где $\alpha_i = 1$, если $x \in A_i$ и $\alpha_i = 0$, если $x \notin A_i$.)
- а) Докажите, что если все A_i — круги, то при $n \geq 4$ такое расположение невозможно¹.
 - б) Можно ли так расположить связные области без требования их выпуклости?
 - в) Можно ли так расположить связные области без требования их выпуклости, но с дополнительным требованием того, чтобы две части, отвечающие двум наборам $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, отличающимся ровно в одной позиции, имели бы общий участок границы? (Для классических кругов Эйлера при $n = 3$ это свойство, очевидно, выполняется.)
- (2) а) Покажите, что отображение $f : M \rightarrow N$ сюръективно тогда и только тогда, когда на него можно сокращать справа, т.е. из всякого равенства $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ следует, что $g_1 = g_2$.
- б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для инъективных отображений.
- (3) Пусть $f : M \rightarrow M$ - отображение конечного множества в себя. Покажите, что существует бесконечно много пар $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $m \neq n$, таких, что $f^m = f^n$.
- (4) Дано отображение $f : M \rightarrow M$, причем известно, что $\forall x \in M \exists n \in \mathbb{N}$, такое, что $f^n(x) = x$. Докажите, что f биекция. Верно ли, что $\exists n \in \mathbb{N}$, такое, что $f^n = \text{Id}_M$?
- (5) Отображение $f : X \rightarrow X$ инъективно, но не биективно. Определим множества $A_0 = X$, $A_1 = f(A_0)$, $\dots$, $A_{n+1} = f(A_n)$, $\dots$, $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$.
- а) Докажите, что $A_{n+1} \subset A_n$. Покажите на примерах, что B может быть как пустым, так и непустым.

¹К сожалению, в предыдущей версии листка эта задача была сформулирована неверно: имеются контр-примеры как минимум для $n = 4, 5, 6$. Мне не известно, можно ли привести такой контрпример для любого n . Студентам, уже рассказавшим до публикации исправленной версии контрпример к старой (неверной) формулировке, он также будет засчитан как решение.

- б) Докажите, что ограничение f на множество $C_n = A_n \setminus A_{n+1}$ является биекцией между C_n и C_{n+1} .
- в) Докажите, что ограничение f на множество B является биекцией множества B на себя.
- (6) Отображение $g : Y \rightarrow X$ называется *правым обратным* (соответственно, *левым обратным*) для отображения $f : X \rightarrow Y$, если $f \circ g = \text{Id}_Y$ (соответственно, $g \circ f = \text{Id}_X$). Пусть отображение f обладает и правым, и левым обратным. Могут ли они оказаться разными?
- (7) Покажите, что отображение $f : X \rightarrow X$ тогда и только тогда обладает свойством $f \circ f = f$, когда ограничение отображения f на его образ $f(X)$ является тождественным отображением: $f|_{f(X)} = \text{Id}_{f(X)}$.