

Введение в дискретную математику и топологию. Осень 2025г

Задачи к семинарам. Список 1.

Множества и функции.

- (1) A , B и C — произвольные подмножества некоторого множества Ω . Вставьте, где возможно, между выражениями правого и левого столбца знаки "=", " $\subset$ ", " $\supset$ " таким образом, чтобы получились верные утверждения, и докажите их, а также приведите примеры, показывающие, что более сильное утверждение может быть и неверно. [На семинаре, коллоквиуме или в проверочной работе могут встретиться и другие аналогичные выражения.]

$(A \cap B) \setminus C$	$(A \setminus C) \cap B$
$A \setminus (B \setminus C)$	$(A \cup C) \setminus B$
$A \setminus (B \setminus C)$	$(A \oplus C) \setminus B$
$A \setminus (B \setminus C)$	$A \setminus (B \cup C)$
$A \cap (B \setminus C)$	$(A \cap B) \setminus (A \cap C)$
$A \setminus (B \setminus C)$	$A \setminus (B \oplus C)$
$A \cap A$	A
$A \cup A$	A
$A \oplus A$	A
$A \cap (B \oplus C)$	$(A \cap B) \oplus (A \cap C)$
$A \cup (B \oplus C)$	$(A \cup B) \oplus (A \cup C)$
$A \setminus (B \cap C)$	$(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
$A \cup (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \setminus (B \cap C)$	$(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
$A \oplus (B \oplus C)$	$(A \oplus B) \oplus C$
$A \cap (B \cap C)$	$(A \cap B) \cap C$
$A \cup (B \cup C)$	$(A \cup B) \cup C$
$(A \oplus B) \cap (B \oplus C) \cap (C \oplus A)$	$A \cap B \cap C$

- (2) Дано отображение $f : X \rightarrow Y$ и непустые подмножества $A \subset X$, $B \subset X$, $P \subset Y$, $Q \subset Y$. Вставьте, где возможно, между выражениями правого и левого столбца знаки "=", " $\subset$ ", " $\supset$ " таким образом, чтобы получились верные утверждения, и приведите примеры, показывающие, что более сильное утверждение может быть и неверно. [На семинаре, коллоквиуме или в проверочной работе могут встретиться и другие аналогичные выражения.]

$f^{-1}(f(A))$	A
$f(f^{-1}(P))$	P
$f(f^{-1}(f(A)))$	$f(A)$
$f^{-1}(f(f^{-1}(P)))$	$f^{-1}(P)$
$f(A \cup B)$	$f(A) \cup f(B)$
$f(A \cap B)$	$f(A) \cap f(B)$
$f(A \setminus B)$	$f(A) \setminus f(B)$
$f^{-1}(P \cup Q)$	$f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$
$f^{-1}(P \cap Q)$	$f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$
$f^{-1}(P \setminus Q)$	$f^{-1}(P) \setminus f^{-1}(Q)$

- (3) A и B — подмножества некоторого множества Ω . При каких условиях на A и B каждое из уравнений $A \cup X = B$, $A \cap X = B$, $A \oplus X = B$
- имеет решение?
 - имеет единственное решение?
- (4) A , B и C — некоторые множества. При каких условиях на A , B и C система $\begin{cases} A \cup X = B \cap X \\ A \cap X = C \cup X \end{cases}$
- имеет решение?
 - имеет единственное решение?
- (5) Пусть $[a; b] \subset \mathbb{R}$ и $[c; d] \subset \mathbb{R}$ — два отрезка. Укажите какие-нибудь значения чисел a, b, c, d так, чтобы формула $f(x) = x^2$ задавала отображение $f : [a; b] \rightarrow [c; d]$, являющееся
- инъективным, но не сюръективным;
 - сюръективным, но не инъективным;
 - не инъективным и не сюръективным;
 - биективным.
- (6) Покажите, что композиция двух инъективных отображений инъективна, а композиция двух сюръективных сюръективна.
- (7) Покажите на примерах, что композиция инъективного и сюръективного отображения (в любом порядке) может не оказаться ни инъективной ни сюръективной.
- (8) Даны отображения $f : X \rightarrow Y$ $g : Y \rightarrow Z$.
- Известно, что композиция $g \circ f$ инъективна. Следует ли из этого, что f инъективно? Следует ли из этого, что g инъективно?
 - Известно, что композиция $g \circ f$ сюръективна. Следует ли из этого, что f сюръективно? Следует ли из этого, что g сюръективно?
- (9) Придумайте такое множество X и отображение $f : X \rightarrow X$, которое является инъективным, но не сюръективным.
- (10) Придумайте такое множество X и отображение $f : X \rightarrow X$, которое является сюръективным, но не инъективным.
- (11) Покажите, что отображение $f : X \rightarrow Y$ инъективно тогда и только тогда, когда для любого непустого подмножества $A \subset X$ выполняется равенство $f^{-1}(f(A)) = A$.
- (12) Покажите, что отображение $f : X \rightarrow Y$ сюръективно тогда и только тогда, когда для любого непустого подмножества $B \subset Y$ выполняется равенство $f(f^{-1}(B)) = B$.
- (13) Придумайте такие два отображения $f : X \rightarrow X$ и $g : X \rightarrow X$, что $f \circ g \neq g \circ f$. Возможен ли такой пример, если множество X состоит всего из двух элементов?

- (14) Пусть два отображения $f : X \rightarrow X$ и $g : X \rightarrow X$ перестановочны, т.е. $f \circ g = g \circ f$, причем отображение f имеет единственную неподвижную точку (т.е. существует единственный элемент $x_0 \in X$, такой что $f(x_0) = x_0$). Докажите, что тогда и $g(x_0) = x_0$.
- (15) Пусть два отображения $f : X \rightarrow X$ и $g : X \rightarrow X$, перестановочны, т.е. $f \circ g = g \circ f$, и оба имеют неподвижные точки. Может ли быть, что у них нет общих неподвижных точек?