

Группа кос, квантовые группы и приложения

Листок 1. Группы кос

Рекомендуемый срок сдачи: **07.10.2025**

Окончательный срок сдачи: **21.10.2025**

1. а) Найдите все неэквивалентные неразложимые двумерные представления группы кос B_3 :

$$\rho_V : B_3 \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V), \quad \dim V = 2.$$

б) Определите, какие из этих представлений являются неприводимыми.

Подсказка: решение упрощается, если учесть, что артиновы генераторы группы кос сопряжены друг другу, а значит их спектры в любом представлении совпадают.

2. Докажите, что группу кос B_n можно задать с использованием набора генераторов $\{b_1^{\pm 1}, c_n^{\pm 1}\}$, где c_n – оператор перестановки концов нитей по циклу $n \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow n$:

$$c_n := b_1 b_2 \dots b_{n-1}.$$

Здесь b_i – артиновы генераторы элементарных заплетений i -й и $(i+1)$ -й нитей (см. записки лекций, стр. 9–10).

Предъявите (полный!) список соотношений для такого набора генераторов B_n .

3. Группу кос B_n можно задать с использованием набора генераторов $\{(ij)^{\pm 1}\}_{1 \leq i < j \leq n}$, где (ij) – операторы перестановки концов пары нитей с номерами i и j :

$$(i \ i+1) := b_i, \quad (ij) := b_{j-1}(i \ j-1)b_{j-1}^{-1} = (b_{j-1}b_{j-2} \dots b_{i+1})b_i(b_{j-1}b_{j-2} \dots b_{i+1})^{-1} \quad \forall j > i+1.$$

Докажите, что полный набор соотношений для этих генераторов имеет вид

$$\begin{aligned} (ij)(kl) &= (kl)(ij) \quad \forall i, j, k, l : i < j < k < l \text{ или } k < i < j < l, \\ (ij)(ik) &= (ik)(jk) = (jk)(ij) \quad \forall i < j < k. \end{aligned}$$

4. Завершите доказательство Утверждения 2 из записок лекций (см. стр. 16), то есть докажите, что для генераторов $A_{ij} := (ij)^2$ группы крашенных кос выполняются соотношения

$$A_{13}(A_{14}A_{24}A_{34}) = (A_{14}A_{24}A_{34})A_{13}. \quad (1)$$

Подсказка: Воспользуйтесь соотношениями для операторов (ij) .

5. Пусть F – свободная группа; $\{A\}$ и $\{B\}$ два набора элементов этой группы; $\langle \{A\} \rangle$ и $\langle \{B\} \rangle$ – их нормальные замыкания в F . Докажите изоморфность фактор-групп

$$(F / \langle \{A\} \rangle) / \langle \{B\} \rangle \simeq (F / \langle \{B\} \rangle) / \langle \{A\} \rangle \simeq F / \langle \{A \cup B\} \rangle.$$

6. Завершите доказательство Утверждения 3 из записок лекций (см. стр. 18), то есть выведите формулы сопряжения:

$$A_{13}A_{24}A_{13}^{-1} = (A_{34}^{-1}A_{14}^{-1}A_{34}A_{14})A_{24}(A_{34}^{-1}A_{14}^{-1}A_{34}A_{14})^{-1}, \quad (2)$$

$$A_{13}^{-1}A_{24}A_{13} = (A_{14}A_{34}A_{14}^{-1}A_{34}^{-1})A_{24}(A_{14}A_{34}A_{14}^{-1}A_{34}^{-1})^{-1}. \quad (3)$$

Подсказка: Представьте соотношение (1) в виде формулы сопряжения оператора $(A_{14}A_{24}A_{34})$ и используйте формулы сопряжения, выведенные при доказательстве Утверждения 3 в записках лекций.

Замечание: Соотношения (1)–(3), сформулированные для набора индексов $\{1, 2, 3, 4\}$, остаются справедливыми при замене $\{1, 2, 3, 4\} \mapsto \{i, j, k, l\} \forall i < j < k < l$. Доказательства для всех наборов $\{i, j, k, l\}$ идентичны.

7. а) Докажите, что внутренний автоморфизм группы кос типа¹ $\mathbf{B}_{n-1}$, задаваемый элементом

$$T_n := B_0 b_1 b_2 \dots b_{n-1},$$

порождает циклический сдвиг генераторов:

$$b_{i+1} = T_n b_i T_n^{-1} \quad \forall i = 1, \dots, n-2, \quad b_1 = T_n^2 b_{n-1} T_n^{-2}.$$

б) Убедитесь, что отображение артиновых генераторов аффинной группы кос типа $\tilde{\mathbf{A}}_{n-1}$ в группу кос типа $\mathbf{B}_{n-1}$

$$b_i \mapsto b_i \quad \forall i = 1, \dots, n-1, \quad b_0 \mapsto T_n^{-1} b_1 T_n = T_n b_{n-1} T_n^{-1}$$

порождает гомоморфизм групп.

¹Описание групп кос типа $\mathbf{B}_{n-1}$ и $\tilde{\mathbf{A}}_{n-1}$, а также определение генераторов B_0 и b_0 , можно найти на странице 30 записок лекций к первой теме, выложенных на странице курса на сайте факультета математики.