

Введение в дискретную математику и топологию. Осень 2025г

Задачи к семинарам. Список 2.

Множества, функции, бинарные операции, отношение эквивалентности.

Не все задачи из этого списка будут обязательно разбираться на семинаре, некоторые задачи могут быть оставлены для самостоятельного решения.

- (1) Пусть $A, B \subset X$ и $C, D \subset Y$. Тогда $A \times C \subset X \times Y$ и $B \times D \subset X \times Y$. Докажите, что $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.
- (2) Пусть $f : X \rightarrow Y$ произвольное отображение.
 - а) Как разложить f в композицию сюръекции и инъекции, т.е. найти такие множество Z , сюръективное отображение $\psi : X \rightarrow Z$ и инъективное отображение $\varphi : Z \rightarrow Y$, что $f = \varphi \circ \psi$?
 - б) Как разложить f в композицию инъекции и сюръекции, т.е. найти такие множество W , инъективное отображение $\alpha : X \rightarrow W$ и сюръективное отображение $\beta : W \rightarrow Y$, что $f = \beta \circ \alpha$?
- (3) Докажите что имеется каноническая биекция между¹ $\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n \text{ раз}}$ и $X^{\{1,2,\dots,n\}}$.
- (4) Дано отображение $f : X \rightarrow Y$ и некоторое множество Z . Найдите и докажите условия инъективности и сюръективности отображения каждого из двух отображений $f^* : Z^Y \rightarrow Z^X$ и $f_* : X^Z \rightarrow Y^Z$, определенных следующим образом: для $\psi \in Z^Y$ положим $f^*(\psi) = \psi \circ f$, а для $\varphi \in X^Z$ положим $f_*(\varphi) = f \circ \varphi$.
- (5) A и B — подмножества некоторого множества X . Придумайте конструкцию естественного отображения из Y^X в $Y^A \times Y^B$, которое будет сюръективно, если $A \cap B = \emptyset$, и инъективно, если $X = A \cup B$, и установите каноническую биекцию между² $Y^{A \sqcup B}$ и $Y^A \times Y^B$.
- (6) Пусть A и B — подмножества некоторого множества X . Установите естественную биекцию между множествами $A \cap B$ и $(A \times B) \cap \Delta$, где Δ — диагональ (т.е. $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$).
- (7) Сколько различных отношений эквивалентности можно ввести на множестве из
а) 3 элементов? б) 4 элементов?
- (8) Введем отношение R на множестве V вершин правильного n -угольника ($n \geq 3$) следующим образом: две вершины находятся в отношении R , если их можно соединить ломаной, звеньями которой являются диагонали многоугольника, имеющие одну и ту же длину. Ломаная должна содержать хотя бы одно звено, может быть самопересекающейся, но не может проходить по одной диагонали дважды. При каких значениях n R является отношением эквивалентности? Сколько классов эквивалентности при этом получится?

¹Конечно, n -кратное декартово произведение $\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n \text{ раз}}$ чаще обозначают как X^n .

²Напомним, что $C = A \sqcup B$ по определению означает, что $C = A \cup B$ и при этом $A \cap B = \emptyset$.

- (9) Введем отношение R на множестве $\mathbb{Z}/n$ следующим образом: если $a, b \in \mathbb{Z}/n$, то aRb если $\exists c \in \mathbb{Z}/n, c \neq [0]$, такое что $c \cdot a = c \cdot b$. При каких значениях n R является отношением эквивалентности? Сколько классов эквивалентности при этом получится?
- (10) Введем отношение R на множестве делителей нуля³ в $\mathbb{Z}/n$ следующим образом: aRb если $\exists c \in \mathbb{Z}/n, c \neq [0]$, такое, что $c \cdot a = c \cdot b = [0]$. При каких значениях n R является отношением эквивалентности? Сколько классов эквивалентности при этом получится?
- (11) Пусть $f : X \rightarrow Y$ некоторое отображение. Введем на X отношение R так: aRb , если $f(a) = f(b)$. Докажите, что R является отношением эквивалентности, и установите биекцию между X/R и образом $f(X)$ отображения f .
- (12) Пусть $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$ — множество ненулевых векторов плоскости. Рассмотрим отношение пропорциональности векторов: два ненулевых вектора $(a; b)$ и $(c; d)$ называются *пропорциональными*, если при некотором ненулевом $\lambda \in \mathbb{R}$ $a = \lambda c$ и $b = \lambda d$. Докажите, что это отношение эквивалентности. Опишите классы эквивалентности.
- (13) Введем отношение эквивалентности $\sim$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$ так: $a \sim b$, если $a - b \in \mathbb{Z}$. Докажите, что это, действительно, отношение эквивалентности. Докажите, что отображение $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, задаваемое формулами $F(t) = (\cos 2\pi t; \sin 2\pi t)$ задает биекцию между фактор-множеством $\mathbb{R}/\sim$ и единичной окружностью.
- (14) Граф называется связным, если из любой вершины можно пройти в любую. Ребро графа называется *мостом*, если после удаления этого ребра граф перестает быть связным. Назовем две вершины эквивалентными, если из одной можно пройти в другую, не проходя по мосту. Докажите, что это, действительно, отношение эквивалентности на множестве вершин. Сколько будет классов эквивалентности, если в графе k мостов? Докажите, что если из графа удалить все мосты, то каждый класс эквивалентности будет связным графом без мостов.
- (15) Приведите три примера бинарных операций, каждая из которых удовлетворяет двум перечисленным ниже условиям и не удовлетворяет третьему. Условия: коммутативность; ассоциативность; существование нейтрального элемента.
- (16) Пусть на множестве X задана бинарная операция $*$ и отношение эквивалентности $\sim$. Говорят, что операция $*$ *согласована* с отношением эквивалентности $\sim$, если из $a \sim a'$ и $b \sim b'$ следует, что $a * b \sim a' * b'$. Покажите, что тогда на фактор-множестве $X/\sim$ можно определить бинарную операцию $\bar{*}$ следующим образом: если $[a] \subset X$ и $[b] \subset X$ — два класса эквивалентности, то $[a]\bar{*}[b]$ это класс эквивалентности $[a * b]$. Покажите, что если операция $*$ была коммутативной, ассоциативной или обладала нейтральным элементом, то тем же свойством будет обладать и операция $\bar{*}$ на $X/\sim$.
- (17) Пусть $n > 1$ — натуральное число. Докажите, что отношение *сравнимости по модулю n* является отношением эквивалентности⁴ на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$. Покажите, что операции сложения и умножения на $\mathbb{Z}$ согласованы с этим отношением эквивалентности, что позволяет на основании результата предыдущей задачи определить операции сложения и умножения на фактор-множестве $\mathbb{Z}/n$.

³Напомним, что $x \in \mathbb{Z}/n, x \neq [0]$ называется *делителем нуля*, если $\exists y \in \mathbb{Z}/n, y \neq [0]$, такое что $x \cdot y = [0]$.

⁴Напомним, что два целых числа x и y называются *сравнимыми по модулю n* , если $x - y$ делится на n .

- (18) Введем на множестве $\mathbb{R}^3$ векторов в трехмерном пространстве отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: два вектора эквивалентны, если их разность параллельна оси OZ . Докажите, что это, действительно, отношение эквивалентности и операция сложения векторов согласована с этим отношением эквивалентности, что позволяет на основании результата задачи 16 определить операцию сложения на фактор-множестве $\mathbb{R}^3/\sim$. Установите биекцию между этим фактор-множеством и множеством векторов плоскости, согласованную с операциями сложения (определенными и на фактор-множестве и на множестве векторов плоскости).
- (19) Введем на множестве $\mathbb{R}^3$ векторов в трехмерном пространстве отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: два вектора эквивалентны, если их разность параллельна плоскости XOY . Докажите, что это, действительно, отношение эквивалентности и операция сложения векторов согласована с этим отношением эквивалентности, что позволяет на основании результата задачи 16 определить операцию сложения на фактор-множестве $\mathbb{R}^3/\sim$. Установите биекцию между этим фактор-множеством и множеством векторов, параллельных оси OZ , согласованную с операциями сложения (определенными и на фактор-множестве и на множестве векторов, параллельных оси OZ).
- (20) **Как сделать $\mathbb{Z}$ из $\mathbb{N}$?** Зададим отношение " $\sim$ " на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ следующим образом: $(a, b) \sim (a', b')$ если $a + b' = a' + b$. Докажите, что это отношение эквивалентности. Опишите фактор-множество. Докажите, что операция покоординатного⁵ сложения на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ согласована с этим отношением эквивалентности. Покажите, что определенная в соответствии с задачей 16 операция сложения на фактор-множестве $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ коммутативна, ассоциативна, обладает нейтральным элементом, и любой класс обладает противоположным. Опишите это фактор-множество.
- (21) **Как сделать $\mathbb{Q}$ из $\mathbb{Z}$?** Введем на множестве $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ отношение эквивалентности $\sim$ так: $(a, b) \sim (c, d)$, если $ad = bc$. Покажите, что это и в самом деле отношение эквивалентности. Покажите, что операция покоординатного⁶ умножения согласована (в смысле задачи 16) с этим отношением эквивалентности, а операция покоординатного сложения — нет. Покажите, что операция $\diamond$ на $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, заданная формулой $(a, b) \diamond (c, d) = (ad + bc, bd)$, коммутативна, ассоциативна, обладает нейтральным элементом и согласована с отношением эквивалентности $\sim$. Покажите, что отображение $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, заданное формулой $f(a, b) = \frac{a}{b}$ задает биекцию между фактор-множеством $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\sim$ и $\mathbb{Q}$, при которой операции $\diamond$ отвечает сложение в $\mathbb{Q}$, а операции покоординатного умножения — операция умножения на $\mathbb{Q}$.
- (22) (Продолжение задачи 13.) Покажите, что операция сложения в $\mathbb{R}$ согласована с отношением эквивалентности $\sim$ из задачи 13, и в силу задачи 16 порождает бинарную операцию на $\mathbb{R}/\sim$, которую мы обозначим $\bar{+}$. Рассмотрим также множество S всех движений евклидовой плоскости, являющихся поворотами относительно фиксированной точки O . Покажите, что операция композиции движений $\circ$ является бинарной операцией на S . Придумайте биекцию $f : (\mathbb{R}/\sim) \rightarrow S$, согласованную с этими операциями, т.е. такую, что $f([x] \bar{+} [y]) = f([x]) \circ f([y])$. ($x, y \in \mathbb{R}$.)

⁵См. следующую сноску.

⁶Если на множестве X задана бинарная операция $\diamond$, а на множестве Y — бинарная операция $\star$, то на их декартовом произведении $X \times Y$ можно определить новую бинарную операцию **покоординатно**: $(x, y) \otimes (x', y') = (x \diamond x', y \star y')$.