Евклидовы кольца

АЛ2⋄1. Ненулевые остатки от деления квадратов целых чисел на простое число $p > 2$ называют *квадратичными вычетами по модулю* p. Все другие ненулевые остатки – квадратичные невычеты. Докажите что, существует $(p–1)/2$ квадратичных вычета и ровно столько же квадратичных невычетов по модулю p.

АЛ2⋄2 (Целые гауссовы числа[1]). Покажите, что $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib | a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$ евклидово кольцо с обычными операциями сложения и умножения комплексных чисел и нормой $\|z\| = z\bar{z}$. Проверьте, что норма мультипликативна, а именно для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ верно, что $\|z_1z_2\| = \|z_1\|\|z_2\|$. Найдите все обратимые элементы в $\mathbb{Z}[i]$.

АЛ2⋄3. Покажите, что любое простое в $\mathbb{Z}[i]$ делит простое натуральное число. Какая может быть норма у простого гауссова числа?

АЛ2⋄4. Покажите, что для простого $p \in \mathbb{Z}[i]$ фактор кольцо $\mathbb{Z}[i]/(p)$ это поле. Какая характеристика этого поля? Сколько элементов в этом поле?

АЛ2⋄5. Докажите, что все простые натуральные число вида $p = 4k + 3$, где k– натуральное, остаются неприводимыми в кольце целых Гауссовых числах.

АЛ2⋄6. Покажите, что для любого простого числа $p = 4n + 1$, где $n \in \mathbb{N}$, существует такое целое число m, что $m^2 + 1$ кратно p.

АЛ2⋄7. Докажите, что простое натуральное число вида $p = 4n+1$, где $n \in \mathbb{N}$, раскладывается в кольце целых Гауссовых чисел в произведение двух неприводимых.

АЛ2⋄8. Докажите, что натуральное число представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел тогда и только тогда, когда все простые натуральные числа вида $4k+3$ входят в его разложение на простые множетели в четной степени.

АЛ2⋄9* (Целые числа Эйзенштейна). Покажите, что $\mathbb{Z}[w] = \{a+wb | a, b \in \mathbb{Z}, w = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\}$ евклидово кольцо с обычными операциями сложения и умножения комплексных чисел и нормой $\|z\| = z\bar{z}$. Проверьте, что норма мультипликативна, а именно для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[w]$ верно, что $\|z_1z_2\| = \|z_1\|\|z_2\|$. Найдите все обратимые элементы в $\mathbb{Z}[w]$.

АЛ2⋄10. Для $w = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})\}$ найдите многочлен $F \in \mathbb{Z}[x]$ минимальной степени со старшим коэффициентом 1 такой, что $F(w) = 0$.

АЛ2⋄11*. Покажите, что любое простое в $\mathbb{Z}[w]$ делит простое натуральное число. Какая может быть норма у простого числа Эйзенштейна?

АЛ2⋄12. Покажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2}b | a, b \in \mathbb{Z}\}$ евклидово кольцо с обычными операциями сложения и умножения действительных чисел и нормой $\|a + \sqrt{2}b\| = |(a + \sqrt{2}b)(a - \sqrt{2}b)|$. Проверьте, что норма мультипликативна, а именно для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ верно, что $\|z_1z_2\| = \|z_1\|\|z_2\|$. Найдите обратимый элемент бесконечного порядка в $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

АЛ2⋄13. Покажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + \sqrt{-5}b | a, b \in \mathbb{Z}\}$ коммутативное кольцо с единицей с обычными операциями сложения и умножения комплексных чисел. Найдите все обратимые элементы в $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Докажите, что в этом кольце любой элемент раскладывается в произведение неприводимых, но это разложение возможно не единственно. Приведите пример неоднозначного разложения.

АЛ2⋄14*. Покажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + \sqrt{-3}b | a, b \in \mathbb{Z}\}$ коммутативное кольцо с единицей с обычными операциями сложения и умножения комплексных чисел. Найдите все обратимые элементы в $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Докажите, что в этом кольце любой элемент раскладывается в произведение неприводимых, но это разложение возможно не единственно. Приведите пример неоднозначного разложения.

[1] http://kvant.mccme.ru/pdf/1999/03/kv0399senderov.pdf

Персональный табель ____ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 2 (23.09.2025)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			