Остатки в кольце целых чисел

https://kvant.mccme.ru/pdf/2000/01/kv0100senderov.pdf
https://kvant.mccme.ru/pdf/2000/03/kv0300senderov.pdf
https://kvant.mccme.ru/pdf/2000/04/kv0400ferm.pdf

АЛ1⋄1. На бревне поставили отметки, делящие его на 17 равных частей, и отметки, делящие его на 37 равных частей. Затем распилили по всем отметкам. Найдите набор (множество с кратностями) длин получившихся кусков.

АЛ1⋄2. Опишите все решения уравнения $nx = 0$ в кольце $\mathbb{Z}/(m)$. Сколько их?

АЛ1⋄3 (Малая теорема Ферма). Докажите, что для любого целого числа a и любого простого целого числа p верно, что $a^p \equiv a \pmod p$.

АЛ1⋄4. Группа обратимых элеметов кольца $\mathbb{Z}/(m)$ обозначается $(\mathbb{Z}/(m))^*$. Количество элементов этой группы называется функцией Эйлера $\varphi(m) = \#(\mathbb{Z}/(m))^*$.

- **а)** $\varphi(m)$ это количество натуральных чисел от 1 до m, взаимно простых с m;
- **б)** Для натурального n и простого натурального p найдите $\varphi(p^n)$;
- **в) (Мультипликативность функции Эйлера)** Для любых взаимно простых чисел m и n покажите, что $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$;

АЛ1⋄5. Для любых натуральных m и n докажите равенства:

- **а)** $\varphi(n)\varphi(m) = \varphi(\text{НОК}(n, m))\varphi(\text{НОД}(n, m))$;
- **б)** $\varphi(nm) = \varphi(\text{НОК}(n, m)) \cdot \text{НОД}(n, m)$;

АЛ1⋄6. Решите уравнения:

- **а)** $\varphi(x) = 18$
- **б)** $\varphi(x) = 12$
- **в*)** $x - \varphi(x) = 12$
- **г)** $\varphi(x) = x/2$
- **д*)** $\varphi(x) = x/3$
- **е*)** $\varphi(nx) = \varphi(x)$, где n— натуральное число, $n > 1$.

АЛ1⋄7. Докажите, что для любого натурального n

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

АЛ1⋄8 (Теорема Эйлера). Докажите , что для любых взаимнопростых натуральных m и a верно сравнение $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

АЛ1⋄9 (Теорема Вильсона). Докажите, что для любого простого натурального числа p верно, что $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

АЛ1⋄10*. Даны натуральные числа $k, m, n \in \mathbb{N}$. Чему равен НОД чисел $k^m + 1$ и $k^n + 1$?

АЛ1⋄11. Докажите, что для каждого натурального числа m существует кратное ему натуральное число n, сумма цифр которого равна m.

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 1 (23.09.2025)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4а			
б			
в			
5а			
б			
6а			
б			
в			
г			
д			
е			
7			
8			
9			
10			
11			