

Семинарский листок 2
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I

Натуральные числа, аксиома непрерывности, архимедовы поля, теорема о вложенных отрезках, открытые и замкнутые множества, связность

1. Назовем множество *чудесным*, если оно одновременно и открыто и замкнуто. Докажите, что в $\mathbb{R}$ есть единственное чудесное непустое подмножество — всё $\mathbb{R}$. Покажите, что $\mathbb{R}$ связно.

2. Докажите, что в если в упорядоченном поле $\mathbb{F}$ есть единственное чудесное (см. предыдущую задачу) непустое подмножество (всё $\mathbb{F}$), то $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

3. Докажите, что упорядоченное поле рациональных функций не связно.

4. Докажите неравенство Бернулли

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx,$$

при $x > -1$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что равенство возможно тогда и только тогда, когда либо $n = 1$, либо $x = 0$.

5. Докажите, что последовательность вещественных чисел $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$, где $|q| < 1$, стремится к нулю.

6. Пусть F — упорядоченное поле, для которого выполнена аксиома Архимеда. Доказать, что для любого $x \in F$ последовательности $x_n = \frac{x}{n}$, $x_n = \frac{x}{2^n}$ стремятся к 0. Приведите пример неархимедова поля, для которого данное свойство не выполнено.

7. Пусть есть упорядоченное поле, удовлетворяющее следующим свойствам: на нём выполняются теорема о вложенных отрезках и аксиома Архимеда. Докажите, что это поле — $\mathbb{R}$.