Задачи к курсу
"Введение в алгебраическую топологию"

С. К. Ландо

23 сентября 2025 г. Лекция 3

1. Докажите, что любые два гомеоморфных тополгических пространства гомотопически эквивалентны.

2. Докажите, что если топологическое пространство Y стягиваемо, то для любого топологического пространства X пространства X и $X \times Y$ гомотопически эквивалентны.

3. Докажите, что цилиндр $S^1 \times [0,1]$ и лист Мебиуса гомотопически эквивалентны.

4. Для топологических пространств из списка
$$[0,1], (0,1), \mathbb{R}^n, S^n, S^1 \times [0,1], \text{лист Мебиуса}, \mathbb{R}P^2,$$
а также для пространств, полученных выкалыванием конечного числа точек из этих,
   - скажите, является ли это пространство стягиваемым;
   - скажите, является ли это пространство односвязным;
   - укажите пары гомотопически эквивалентных пространств;
   - укажите компактное топологическое пространство, гомотопически эквивалентное данному;
   - скажите, является ли это пространство гомотопически эквивалентным конечному графу.

5. Докажите, что отображение $([\gamma_1], [\gamma_2]) \mapsto [\gamma_2 \# \gamma_2]$ задает структуру группы на множестве $\pi_1(X, x_0)$ классов гомотопии петель в топологическом пространстве X с началом и концом в точке $x_0 \in X$.

6. Докажите, что две группы с копредставлениями $\langle a, b | a^2 b^2 \rangle$ и $\langle a, b | abab^{-1} \rangle$ изоморфны между собой. Фундаментальной группе какой поверхности изоморфна эта группа?

7. Докажите, что две группы с копредставлениями $\langle a, b, c, d | aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \rangle$ и $\langle a, b, c, d | abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1} \rangle$ изоморфны между собой. Фундаментальной группе какой поверхности изоморфна эта группа?

8. Докажите, что для пары топологических пространств X, Y справедливо равенство $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

9. Опишите фундаментальную группу 2-мерного симплициального комплекса, полученного из поверхности тетраэдра следующим образом: добавим вершину в центр тетраэдра, соединим ее ребрами с вершинами тетраэдра, и каждую пару новых ребер и соответствующее исходное ребро тетраэдра заклеим треугольником.

10. Докажите, что фундаментальная группа замкнутой двумерной поверхности, проколотой по крайней мере в одной точке, изоморфна фундаментальной группе букета окружностей. Найдите число этих окружностей для а) ориентируемой поверхности рода g, проколотой в n точках; б) неориентируемой поверхности рода g, проколотой в n точках.

11. Докажите, что а) фундаментальная группа замкнутой двумерной ориентируемой поверхности рода g допускает копредставление с $2g$ образующими и одним соотношением $\langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g | a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$; б) фундаментальная группа замкнутой двумерной неориентируемой поверхности рода g допускает копредставление с g образующими и одним соотношением $\langle a_1, \ldots, a_g | a_1^2 \ldots a_g^2 \rangle$.

12. Докажите, что две свободные группы с различным числом образующих не изоморфны между собой.