

Семинарский листок 3
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I

Компактность, плотность, нигде не плотность, канторово множество, предел последовательности, фундаментальные последовательности

1. Докажите, что замкнутое подмножество компакта всегда компактно.
2. Докажите, что множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, всюду плотно на прямой.
3. Множество называется совершенным, если оно замкнуто и не имеет изолированных точек. Докажите, что канторово множество совершенно.
4. Докажите, что канторово множество нигде не плотно, а дополнение к нему плотно.
5. Пусть $a > 0$. Докажите, что $a^{1/n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Более общо, пусть $x_n \in [\varepsilon, M]$, тогда $\sqrt[n]{x_n} \rightarrow 1$.
6. Найдите пределы последовательностей

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 7n + 7} - \sqrt{n^2 + 5n + 5}, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5^n + 7^n}{2} \right)^{1/n}, \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n}$$

7. Найдите пределы последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где

$$(a) x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}, \quad (b) x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}, x_1 = 1.$$

8. Найдите пределы

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)^{n^2}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)^{n^2}$$