

Евклидовы кольца

Определения Комплексные числа вида $a + ib \in \mathbb{C}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, называются *целыми гауссовыми числами* $\mathbb{Z}[i]$. Комплексные числа вида $a + bw \in \mathbb{C}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$ и $w = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, называются *целыми числами Эйзенштейна* $\mathbb{Z}[w]$, где $w = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. Кольца целых Гауссовых чисел и целых чисел Эйзенштейна – евклидовы относительно нормы $\|z\| = z\bar{z}$.

АСЗ♦1. Изобразите на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ а) $\mathbb{Z}[i]$; б) $\mathbb{Z}[w]$.

АСЗ♦2. Покажите, что действительно можно делить с остатком в кольцах

а) $\mathbb{Z}[i]$;

б) $\mathbb{Z}[w]$

АСЗ♦3. Найдите все обратимые элементы в кольце $\mathbb{Z}[i]$.

АСЗ♦4. Найдите наибольший общий делитель $\text{нод}(a, b)$ в кольце целых гауссовых чисел и укажите такие целые числа x и y , что $\text{нод}(a, b) = ax + by$ для чисел

а) $a = 7 - i, b = -4 + 7i$;

б) $a = 5 + 3i, b = 6 - 4i$.

АСЗ♦5. Докажите, что если целые числа a и b взаимно просты в $\mathbb{Z}$, то они взаимно просты и в $\mathbb{Z}[i]$.

АСЗ♦6. Как на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ выглядят главные идеалы:

а) $(7) \subset \mathbb{Z}[i]$;

б) $(2 + i) \subset \mathbb{Z}[i]$;

в) $(a + ib) \subset \mathbb{Z}[i]$.

АСЗ♦7. Найдите наименьшее по модулю натуральное число кратное $612 - 1003i$ в $\mathbb{Z}[i]$.

АСЗ♦8. Разложите на простые множители в кольце целых гауссовых чисел

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5.

АСЗ♦9. Для каких целых гауссовых чисел главные идеалы порожденные этим числом и комплексно сопряженным к нему совпадают $(a + ib) = (a - ib)$?

АСЗ♦10. Сколько элементов в фактор-кольце $\mathbb{Z}[i]/(a + ib)$?

АСЗ♦11. Докажите, что если натуральное простое число p представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел, то такое представление единственно с точностью до порядка слагаемых.

АСЗ♦12. Докажите, что число 5^n раскладывается в сумму двух квадратов целых чисел $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ различными способами.

АСЗ♦13. Найдите все обратимые элементы в кольце целых чисел Эйзенштейна.

АСЗ♦14. Найдите наибольший общий делитель $\text{нод}(a, b)$ в кольце целых чисел Эйзенштейна и укажите такие целые числа Эйзенштейна x и y , что $\text{нод}(a, b) = ax + by$ для чисел $a = 7 - e^{\frac{2\pi i}{3}}, b = -4 + 7e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

АСЗ♦15. Разложите на простые множители 2 и 3 в кольце целых чисел Эйзенштейна.