

Введение в дискретную математику и топологию. Осень 2025г

Задачи к семинарам. Список 3.

Формулы алгебры логики и булевы функции.

Не все задачи из этого списка будут обязательно разбираться на семинаре, некоторые задачи могут быть оставлены для самостоятельного решения.

- (1) Про каждый из следующих наборов операций выясните, можно ли выразить формулой с использованием только этих операций любую булеву функцию. Если да, то выразите через них дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание, а если нет, то приведите пример функции, которую выразить нельзя.
а) $\vee$ и $\wedge$; б) $\vee$ и $\neg$; в) $\rightarrow$ и $\neg$; г) $\wedge$ и $+$; д) $\wedge$, $+$ и 1 ; *е) $\downarrow$.
- (2) Проверьте, что следующие формулы являются тавтологиями.
а) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$;
б) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$;
в) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$;
г) $A \rightarrow (A \vee B)$;
д) $(A \wedge B) \rightarrow A$;
е) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$.
- (3) Составьте таблицы истинности и напишите совершенные ДНФ для следующих формул:
а) $\neg(P \rightarrow (P \wedge Q)) \rightarrow (P \vee R)$;
б) $(P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \rightarrow P) \vee Q)$;
в) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow (R \wedge \neg P))$;
г) $((P \rightarrow Q) \equiv \neg(P \wedge R)) \rightarrow \neg R$;
д) $\neg P \equiv ((Q \rightarrow R) \rightarrow P)$;
е) $\neg P \equiv (Q \rightarrow (R \rightarrow P))$;
ж) $(\neg P \equiv Q) \rightarrow (R \rightarrow P)$;
з) $\neg(P \equiv (Q \rightarrow R)) \rightarrow P$.
- (4) Покажите, что формула $F \equiv G$ является тавтологией тогда и только тогда, когда формулы F и G задают одну и ту же булеву функцию.
- (5) Покажите, что формула $F \rightarrow G$ является тавтологией тогда и только тогда, когда $N_F \subset N_G$. Здесь через N_F и N_G обозначены носители булевых функций, заданных формулами F и G .
- (6) Покажите, что формула $F \rightarrow G$ является тавтологией тогда и только тогда, когда в СовДНФ для формулы G присутствуют все мономы из СовДНФ для формулы F .
- (7) Покажите, что формулы булевой алгебры $F = (X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge \neg Z) \vee (Z \wedge \neg X)$ и $G = (X \wedge \neg Z) \vee (Z \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge \neg X)$ задают одну и ту же булеву функцию. Придумайте цепочку тождественных преобразований булевой алгебры, преобразовывающую F в G . Есть ли более короткий путь, нежели преобразование каждой формулы в их общую совершенную ДНФ?

- (8) Найдите совершенную ДНФ для формулы

$$\neg(X_1 \rightarrow (X_2 \rightarrow (X_3 \rightarrow (\dots \rightarrow (X_{n-1} \rightarrow X_n) \dots))))).$$

- (9) Сколько мономов будет в совершенную ДНФ для формулы

$$(X_1 \rightarrow X_2) \wedge ((X_2 \rightarrow X_3) \wedge ((X_3 \rightarrow X_4) \wedge ((\dots \wedge (X_{n-1} \rightarrow X_n) \dots))))?$$

Опишите эти мономы.

- (10) Пусть F и G две формулы алгебры логики, в которых из всех знаков логических операций содержится только знаки дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Докажите, что если формулы F и G задают одну и ту же булеву функцию, то формулы $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$, полученные заменой в F и G всех знаков дизъюнкции на конъюнкции и наоборот, также будут задавать одну и ту же булеву функцию.
- (11) Пусть F тавтология, в которых из всех знаков логических операций содержится только знаки дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, а формула $\tilde{F}$ получается заменой в F всех знаков дизъюнкции на конъюнкции и наоборот. Докажите, что $\neg\tilde{F}$ является тавтологией.
- (12) Пусть F — формула алгебры логики, в которых из всех знаков логических операций содержится только знаки дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Формула F^* получается из формулы F заменой всех знаков дизъюнкции на конъюнкции и наоборот, а также заменой всех переменных на их отрицания. Докажите, что $\neg F \equiv F^*$ — тавтология.
- (13) Пусть формула алгебры логики записывается последовательностью знаков $a_1, a_2, \dots, a_n$, где каждое из a_i это знак логической операции, левая или правая скобка или имя переменной. Пусть $1 \leq k < m \leq n$, $a_k = ($ и $a_m =)$. Верно ли, что если в последовательности $a_k, \dots, a_m$ имеется одинаковое число открывающих и закрывающих скобок, то эта последовательность есть также запись некоторой формулы алгебры логики?
- (14) Пусть формула алгебры логики записывается последовательностью знаков $A = a_1, a_2, \dots, a_n$, где каждое из a_i это имя переменной, левая или правая скобка или знак логической операции. Верно ли, что если в последовательности $\tilde{A} = a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ заменить все левые скобки на правые и наоборот, то получится снова формула алгебры логики? Если это утверждение неверно, то можно ли сделать его верным, наложив какие-нибудь ограничения на список используемых знаков логических операций? Верно ли, что если A является тавтологией, и $\tilde{A}$ — формулой, то и $\tilde{A}$ также является тавтологией? Если это утверждение неверно, то можно ли сделать его верным, наложив какие-нибудь ограничения на список используемых знаков логических операций?
- (15) Напишите отрицание следующих утверждений, не используя явно отрицательных оборотов:
- а) В любой электричке Одинцово-Москва хотя бы в одном из вагонов все пассажиры едут без билета;
 - б) В любой электричке Одинцово-Москва в каждом вагоне есть безбилетник.
 - в) В одной из электричек Одинцово-Москва в каждом вагоне были безбилетники.
 - г) В одной из электричек Одинцово-Москва в одном из вагонов все ехали без билета.