

Введение в дискретную математику и топологию. Осень 2025г

Задачи к семинарам. Список 4.

ЧУМЫ.

Не все задачи из этого списка будут обязательно разбираться на семинаре, некоторые задачи могут быть оставлены для самостоятельного решения. Звездочкой отмечены задачи, так или иначе обсуждавшиеся на лекциях.

- (1) Может ли некоторое отношение на некотором множестве быть одновременно и отношением эквивалентности и отношением частичного порядка? Перечислите все такие отношения.
- (2) * Сколько имеется рефлексивных отношений на множестве из трех элементов? Сколько среди них отношений эквивалентности? Сколько среди них отношений частичного порядка?
- (3) * Пусть $(X; R)$ и $(Y; S)$ два множества с заданными на них отношениями. Говорят, что $(X; R)$ и $(Y; S)$ изоморфны, если существует такая биекция $f : X \rightarrow Y$, такая что xRx' тогда и только тогда, когда $f(x)Sf(x')$ (x и x' — элементы X). Такая биекция f называется тогда изоморфизмом между $(X; R)$ и $(Y; S)$. Покажите, что отношение быть изоморфными является отношением эквивалентности на множестве всех отношений на некотором фиксированном множестве X .
 - а) Перечислите все отношения эквивалентности на множестве из 3 элементов и опишите разбиение этого множества на классы относительно изоморфизма.
 - б) Перечислите все отношения частичного порядка на множестве из 3 элементов и опишите разбиение этого множества на классы относительно изоморфизма. Нарисуйте соответствующие диаграммы Хассе.
- (4) Покажите, что если некоторый элемент a некоторого ЧУМа X является одновременно и максимальным и минимальным, то a не сравним ни с одним другим элементом ЧУМа X .
- (5) Перечислите все (с точностью до изоморфизма) ЧУМы из 4 элементов, имеющие ровно 2 максимальных элемента и ровно 2 минимальных. Какие из них являются самодвойственными? (Определение см в задаче 12.)
- (6) Изоморфны ли следующие частично упорядоченные множества:
 - а) $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$?
 - б) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$?
 - в) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$?
- (7) * Пусть $(X, <)$ — некоторый ЧУМ, $a, b \in X$. Отрезком $[a; b]$ называется множество $[a; b] = \{x \in X \mid a < x \text{ и } x < b\}$. (В частности, если a и b не сравнимы, то $[a; b] = \emptyset$, а если $a < b$, то $a, b \in [a; b]$.) Если $a \neq b$ и $[a; b] = \{a, b\}$, то a называется *непосредственным предшественником* элемента b , а b — *непосредственным последователем* элемента a .
 - а) Приведите пример линейно упорядоченного множества, в котором ни у одного элемента нет ни непосредственного последователя, ни непосредственного предшественника.
 - б) Покажите, что если в линейно упорядоченном множестве ни у одного элемента нет непосредственного последователя, то ни у одного элемента нет и непосредственного предшественника.
 - в) Приведите пример линейно упорядоченного множества, в котором у каждого элемента есть непосредственный последователь, но существуют неминимальные элементы, у которых нет непосредственного предшественника.

- (8) Обозначим через $E(X)$ множество отношений эквивалентности на множестве X . Согласно задаче 3 отношение "быть изоморфными" является отношением эквивалентности на $E(X)$. Для конечного множества X (пусть $|X| = n$) установите биекцию между фактормножеством множества $E(X)$ по отношению "быть изоморфными" и множеством диаграмм Юнга площадью n .
- (9) Докажите, что на $\mathbb{Z}/n$ нельзя ввести никакого нетривиального отношения частичного порядка $\prec$, с которым была бы согласована операция сложения на $\mathbb{Z}/n$, то есть такого, что из $a \prec b$ следует, что $a + c \prec b + c$ для любого $c \in \mathbb{Z}/n$.
- (10) Докажите, что на конечном множестве можно ввести единственное (с точностью до изоморфизма) отношение линейного порядка. Приведите пример двух не изоморфных отношений линейного порядка на $\mathbb{N}$.
- (11) Обозначим через D_n множество делителей натурального числа n и введем на нем отношение порядка: $a \prec b$, если число a является делителем числа b (т.е. $a \mid b$). При каких значениях n ЧУМ D_n изоморфен ЧУМу 2^X всех подмножеств некоторого конечного множества X (с отношением $\subset$)?
- (12) Пусть на множестве X введено некоторое отношение частичного порядка $\prec$. Введем на X новое отношение порядка $\prec^*$ так: $a \prec^* b$, если $b \prec a$. ЧУМ $(X; \prec^*)$ называется *двойственным* к ЧУМу $(X; \prec)$; если же эти два ЧУМа изоморфны, то ЧУМ $(X; \prec)$ называется *самодвойственным*.
- а) Сколько существует различных (с точностью до изоморфизма) самодвойственных отношений частичного порядка на множестве из 4 элементов? Нарисуйте их диаграммы Хассе.
 - б) Покажите, что ЧУМ $(2^X, \subset)$ является самодвойственным для любого множества X .
 - в) При каких значениях n ЧУМ D_n из задачи 11 является самодвойственным?
 - г) Придумайте какое-нибудь отношение линейного порядка на $\mathbb{N}$, чтобы получившийся ЧУМ оказался самодвойственным.
- (13) Сколько существует попарно неизоморфных ЧУМов, состоящих из n элементов, в которых максимальная по длине цепь содержит $n - 1$ элемент? Сколько из них являются самодвойственными?
- (14) Обозначим множество непустых цепей некоторого ЧУМа X через $C(X)$; покажите, что отношение включения превращает $C(X)$ в ЧУМ.
- а) Докажите, что если X — конечное множество, то длина любой цепи в $C(X)$ не превосходит максимума длин цепей в X .
 - б) Пусть $X = \{1, 2, \dots, n\}$ — конечное линейно упорядоченное множество. Сколько в $C(X)$ цепей максимальной длины? Сколько в $C(X)$ антицепей максимальной длины?
- (15) Пусть X — конечное множество. Чего больше:
- а) отношений эквивалентности на X или отношений частичного порядка на X ?
 - б) классов относительно изоморфизма отношений эквивалентности на X или классов относительно изоморфизма отношений частичного порядка на X ?

- (16) * Пусть $(M; \prec_M)$ и $(N; \prec_N)$ — два частично упорядоченных множества, причем $M \cap N = \emptyset$. Тогда на их объединении $M \sqcup N$ можно определить отношение частичного порядка $\prec_\sqcup$ таким образом, чтобы все элементы одного и того же множества сравнивались в соответствии с уже имеющимся на этом множестве отношением, а все элементы множества M оказались меньше всех элементов множества N . (Заметьте, что тут важен порядок M и N !) Формально говоря, если описывать эти отношения как подмножества прямого произведения $\prec_M \subset (M \times M)$ и $\prec_N \subset (N \times N)$, то отношение частичного порядка $\prec_\sqcup \subset ((M \sqcup N) \times (M \sqcup N))$ будет определяться как $\prec_\sqcup = \prec_M \cup \prec_N \cup (M \times N)$.¹ Докажите, что $\prec_\sqcup$, действительно, является отношением частичного порядка на $M \sqcup N$. Придумайте такое подмножество $X \subset \mathbb{Q}$ (с обычным отношением линейного порядка $\leq$) чтобы ЧУМы $(X, \leq)$ и $(\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}, \prec_\sqcup)$ оказались изоморфны.
- (17) * Пусть $(M; \prec_M)$ и $(N; \prec_N)$ — два частично упорядоченных множества. Тогда на их произведении $M \times N$ можно определить два отношения частичного порядка: "покоординатное" $(x, y) \prec_C (x', y')$, если $x \prec_M x'$ и $y \prec_N y'$ и "лексикографическое" $(x, y) \prec_L (x', y')$ если $x \prec_M x'$ и $x \neq x'$ либо если $x = x'$ и $y \prec_N y'$.
- Покажите, что $\prec_C$ и $\prec_L$, действительно, являются отношениями частичного порядка на $M \times N$, причем из $(x, y) \prec_C (x', y')$ следует, что $(x, y) \prec_L (x', y')$, но не наоборот.
 - Покажите, что если $\prec_M$ и $\prec_N$ — отношения линейного порядка, то то же верно и про $\prec_L$, но не про $\prec_C$.
 - Покажите, что для обычного отношения порядка на множестве $\{0, 1\}$ (т.е. $0 \leq 1$) ЧУМ $\{0, 1\}^n$ с покоординатным отношением порядка $\prec_C$ изоморфен ЧУМу $(2^X; \subset)$, где X — конечное множество, состоящее из n элементов.
 - Покажите, что для обычного отношения порядка на множестве $\{0, 1\}$ (т.е. $0 \leq 1$) ЧУМ $\{0, 1\}^n$ с лексикографическим отношением порядка $\prec_L$ изоморфен отрезку натурального ряда $[0, 2^n - 1] \subset \mathbb{Z}$, причем изоморфизм представляет собой запись натуральных чисел в позиционной двоичной системе счисления, т.е. вектору $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ сопоставляется целое число $a_1 2^{n-1} + a_2 2^{n-2} + \dots + a_{n-1} 2^1 + a_n 2^0 \in [0, 2^n - 1]$.
 - Для лексикографического отношения порядка $\prec_L$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, построенного из стандартных отношений порядка на $\mathbb{R}$, нарисуйте отрезок $[(1, 2); (2, 1)]$.
- (18) * Пусть R — рефлексивное и транзитивное отношение на множестве X . Определим на X новое отношение $\sim_R$ так: $a \sim_R b$, если одновременно aRb и bRa . Докажите, что $\sim_R$, действительно, является отношением эквивалентности. Определим на фактор-множестве $X / \sim_R$ новое отношение $\prec_R$ так: $[a] \prec_R [b]$, если aRb (здесь $a, b \in X$, $[a]$ и $[b]$ — классы эквивалентности). Докажите, что $\prec_R$ является отношением частичного порядка на фактор-множестве $X / \sim_R$.

¹Напомним, что прямое произведение $(M \sqcup N) \times (M \sqcup N)$ есть несвязное объединение четырех произведений: $((M \sqcup N) \times (M \sqcup N)) = (M \times M) \sqcup (N \times N) \sqcup (M \times N) \sqcup (N \times M)$.