

Задачи к курсу “Введение в алгебраическую топологию”

С. К. Ландо

7 октября 2025 г. Лекция 4

1. Отображение $\phi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ задается формулой $\phi : z \mapsto z + 1/z$. Докажите, что ϕ является конечнократным накрытием и найдите его степень. Какова группа монодромии этого накрытия?
2. Отображение $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, заданное многочленом $\phi : z \rightarrow z^3 - 1$, определяет разветвленное накрытие комплексной прямой, проколотой в критических значениях многочлена ϕ . Найдите группу монодромии этого накрытия.
3. Постройте накрытие ориентируемой компактной поверхности рода 2 ориентируемой компактной поверхностью рода 3.
4. Постройте универсальное накрытие а) над восьмеркой — графом с одной вершиной и двумя петлями; б) над букетом n окружностей — графом с одной вершиной и n петлями, — при произвольном n .
5. Постройте универсальное накрытие над группой $SO(3)$ вращений трехмерного вещественного пространства; найдите ее фундаментальную группу.
6. Постройте универсальное накрытие над бутылкой Клейна; найдите ее фундаментальную группу. Сравните полученный результат с известным ранее.
7. Докажите, что над каждой двумерной неориентируемой поверхностью есть накрытие степени 2, покрывающее пространство которого ориентируемо.
8. Докажите, что степень накрытия $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ линейно связного топологического пространства X линейно связным топологическим пространством Y совпадает с индексом подгруппы $f_*(\pi_1(Y, y_0))$ в $\pi_1(X, x_0)$.
9. Воспользовавшись знанием фундаментальной группы проективной плоскости, докажите, что для всякого непрерывного отображения $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ найдутся две противоположные точки $\{x, -x\} \in S^2$, такие, что $f(x) = f(-x)$.