1 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Неформально говоря, динамическая система — это тройка, состоящая из фазового пространства, времени и закона эволюции. Точки фазового пространства должны находиться в однозначном соответствии с всевозможными состояниями какого-то процесса. Если процесс развивается пошагово, мы говорим о дискретном времени и отождествляем его с $\mathbb{Z}$ — или $\mathbb{Z}_+$, если процесс необратим или прошлое нас не интересует. В противном случае говорят о непрерывном времени и отождествляют его с $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$. Траектория системы — это отображение из времени в фазовое пространство, подчиняющееся закону эволюции. Этот закон должен, в общем случае, по состояниям системы в прошлом и настоящем позволять установить её будущее.

Рассмотрим биекцию f произвольного множества X. В качестве фазового пространства выступает само это множество, временем служит группа $\mathbb{Z}$, а в качестве закона эволюции выступает наша биекция: за время ноль всякая точка переходит в саму себя, $f^0(x) = x$, за время 1 она переходит в $f(x)$, за время n — в $f^n(x)$. Это то же самое, что действие группы $\mathbb{Z}$ на X. Если бы f не было биективно, с прошлым нельзя было бы обращаться так же, как с будущим, поэтому естественно сперва его исключить и ограничиться действием полугруппы $\mathbb{Z}_+$.

В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений нас будут интересовать динамические системы с 1) конечномерным фазовым пространством, 2) непрерывным временем, 3) траекториями, задаваемыми дифференцируемыми функциями, и 4) законом эволюции, который по текущему состоянию однозначно определяет будущее и прошлое.

1.1 Дифференциальное уравнение, его решения, задача Коши

Нас в первую очередь будут интересовать **обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка в нормальной форме** (т.е. разрешенные относительно производной):

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{1}$$

Здесь $x(t)$ — неизвестная функция, а $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$ — известная функция (D — область). Далее будем по умолчанию считать, что f непрерывная. Решением уравнения называется определенная на интервале (возможно, бесконечном) функция $\varphi\colon (a, b) \to \mathbb{R}^n$, которую можно подставить в уравнение и которая превращает его в тождество: $\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t))$ на (a, b). Решить уравнение — найти все решения.

Определение 1. Задача Коши получается, если к уравнению добавить т.н. начальное условие — условие, что неизвестная функция принимает заданное значение при начальном значении аргумента:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2}$$

Забегая немного вперед, скажем, что для уравнения в нормальной форме с гладкой правой частью задача Коши имеет единственное решение — в том смысле, что *любые удовлетворяющие начальному условию решения уравнения совпадают на пересечении их областей определения.*

Пример 2. Простейшее уравнение. Это уравнение вида $\dot{x} = f(t)$. Ясно, что решениями будут определенные на интервалах первообразные функции f и только они. Решение задачи Коши имеет вид $x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$.

Пример 3. Свободное падение точечного тела. Положение задается функцией времени $x(t)$, движение подчиняется 2-му закону Ньютона $F = ma$, где $a = \ddot{x}$, $F = -mg$, что даёт уравнение $\ddot{x} = -g$. Оно имеет решения $x = x_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, но не имеет вид (1). Это легко исправить, введя переменную v и перейдя к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = -g. \end{cases}$$

Она имеет вид (1) и легко видеть, что её решения находятся в биективном соответствии с решениями исходного уравнения 2-го порядка. Порядок понизился, а размерность повысилась! Точно так же можно от произвольного разрешенного относительно старшей производной одномерного уравнения n-го порядка

$$x^{(n)} = f(x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, \dots, \dot{x}, x, t)$$

перейти, вводя переменные $x_1, \dots, x_{n-1}$, к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = x_1, \\ \dot{x}_1 = x_2, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-2} = x_{n-1}, \\ \dot{x}_{n-1} = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x, t). \end{cases}$$

Пример 4. Уравнение $\dot{x} = ax$ описывает рост числа бактерий при избытке пищи при $a > 0$ и изменение количества вещества, претерпевающего радиоактивный распад, при $a < 0$. Сделаем замену времени $\tau = at$, т.е. перейдем к рассмотрению неизвестной функции $x(\tau) = x(t(\tau))$. Её производная по τ есть $x' = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \dot{x}/a$. Стало быть, старая неизвестная удовлетворяет уравнению $\dot{x} = ax$, если и только если новая удовлетворяет уравнению $x' = x$. Решим его при помощи загадочной замены $x(t) = y(t)e^t$. Уравнение на x выполнено тогда и только тогда, когда y удовлетворяет уравнению

$$\underbrace{\dot{y}e^t + ye^t}_{\dot{x}} = \underbrace{ye^t}_{x} \;\Leftrightarrow\; \dot{y} = 0 \;\Leftrightarrow\; y = const.$$

Обратные замены дают $x(\tau) = Ce^{\tau}$ и $x(t) = Ce^{at}$, где C — произвольная постоянная. Полученная формула задает все решения уравнения. Также легко получить решение задачи Коши с начальным условием $x(t_0) = x_0$ — это $x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$. Этот пример нужен, чтобы мы поняли, как работают замена времени и замена переменной.

1.2 Расширенное фазовое пространство и поле направлений

В случае уравнения (1) фазовое пространство — это просто пространство, в котором решения принимают значения. Игнорируя нюансы, связанные с тем, что правая часть уравнения (1) может быть определена не всюду, будем говорить, что фазовое пространство есть $\mathbb{R}^n$. Расширенное фазовое пространство — это декартово произведение фазового пространства и оси времени: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$. Отображение f задает в расширенном фазовом пространстве **поле направлений**. А именно, в касательном пространстве в каждой точке (t_0, x_0) берется прямая с направляющим вектором $(1, f(t_0, x_0)) \in T_{(t_0,x_0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. **Интегральная кривая поля направлений** — это регулярная[1] гладкая кривая, которая в каждой своей точке касается поля направлений.

Теорема 5. *Интегральные кривые построенного по уравнению (1) поля направлений — это в точности графики решений уравнения (1).*

Доказательство. Рассмотрим график решения $\varphi(t)$. У него есть очевидная параметризация $t \mapsto (t, \varphi(t))$ Касательный вектор к нему в точке (t_0, x_0) имеет вид $(1, \dot\varphi(t_0)) = (1, f(t_0, x_0))$, поэтому график касается поля направлений. Так как f и φ непрерывны, производная $\dot\varphi = f(t, \varphi(t))$ непрерывна, так что график — гладкая кривая.

Обратно, пусть у нас есть интегральная кривая — покажем, что это график решения. Рассмотрим для кривой гладкую параметризацию $s \mapsto (t(s), x(s))$. Её вектор скорости пропорционален $(1, f)$, поэтому $t'(s)$ не обнуляется. Но тогда функция $t(s)$ обратима и обратная — гладкая. Подставляя зависимость $s(t)$ в параметризацию, получим гладкую параметризацию временем: $t \mapsto (t, x(s(t)))$. Получается, что интегральная кривая оказалась графиком функции $\varphi(t) = x(s(t))$. Производная новой параметризации, с одной стороны, есть $(1, \dot\varphi(t))$, а с другой стороны, она пропорциональна $(1, f(t, \varphi(t)))$, т.к. кривая интегральная. Поэтому $\dot\varphi(t) = f(t, \varphi(t))$, т.е. φ — решение. □

Как было упомянуто выше, в случае гладкого поля направлений (гладкой правой части уравнения), задача Коши имеет единственное решение. Точка пересечения интегральных кривых означает совпадение начальных условий в задаче Коши, так что в этом случае интегральные кривые должны совпасть (в том смысле, что соответствующие им решения совпадают на пересечении областей определения). Таким образом, в гладком случае расширенное фазовое пространство разбивается на интегральные кривые. Более того, это разбиение является слоением — в окрестности каждой точки можно диффеоморфизмом выпрямить разбиение на интегральные кривые до разбиения на параллельные прямые; но это мы докажем потом (см. теорему о выпрямлении поля направлений).

1.3 Автономные уравнения, векторные поля и фазовые портреты

Уравнение (1) называется **автономным**, если правая часть не зависит от t:

$$\dot x = v(x).$$

[1] Параметризованная кривая называется регулярной, если её производная не обнуляется. Обычно в определении интегральной кривой говорят просто «гладкая кривая», имея в виду гладкое одномерное подмногообразие. По теореме об эквивалентных определениях подмногообразия у него локально есть регулярная параметризация и для нее вектор скорости лежит в касательной прямой в соответствующей точке.

Для автономного уравнения поле направлений на всех плоскостях $\{t = const\}$ устроено одинаково, параллельный перенос вдоль оси t переводит его в себя. Этот параллельный перенос переводит интегральные кривые в интегральные кривые, так что если φ — решение, то $\varphi(t - t_0)$ — тоже решение (это видно и при подстановке в уравнение).

Для автономных уравнений существует более экономное геометрическое представление. Рассмотрим фазовое пространство и в каждой его точке x_0 возьмем касательный вектор $v(x_0)$ — получится, что автономное уравнение определяет **векторное поле** в фазовом пространстве, так что автономные уравнения можно отождествить с векторными полями. **Траекторией или фазовой кривой** будем называть образ решения. Решения, отличающиеся друг от друга сдвигом времени, дают одну и ту же траекторию. Пусть две траектории пересеклись — это значит, что соответствующие решения проходят через одну точку, но, быть может, в разные моменты времени. Сделаем в одном из решений сдвиг времени (траектория не изменится), чтобы решения проходили через одну точку в один момент времени, — тогда это решения одной задачи Коши, так что в гладком случае они должны совпасть на пересечении областей определения. Игнорируя необходимость оговорок про области определения, коротко говорим, что траектории либо не пересекаются, либо совпадают. Но тогда (непродолжаемые) фазовые кривые образуют разбиение фазового пространства. Это разбиение вместе с данными о том, в каком направлении происходит движение по фазовой кривой с ростом времени, называется **фазовым портретом** автономного уравнения. Направление движения на рисунках показывается стрелочкой. Нули функции v называются *особыми точками* уравнения. Им соответствуют постоянные решения, они изображаются на фазовом портрете просто точкой.

1.4 Решение автономного уравнения на прямой

Теорема 6. *Для автономного уравнения $\dot{x} = v(x)$ на прямой с $v \in C^1(\mathbb{R})$ через каждую точку плоскости расширенного фазового пространства проходит ровно одна интегральная кривая и задача Коши имеет единственное решение. В случае особой точки это постоянное решение, а в случае неособой точки (t_0, x_0) интегральная кривая, проходящая через неё, задается уравнением*

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{v(s)}. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим неособую точку x_0 — она содержится в максимальном интервале (a, b), свободном от особых точек: $b = \inf\{x > x_0 \colon v(x) = 0\}$ или $+\infty$. Как мы выяснили, графики решений уравнения — это интегральные кривые поля направлений $(1, v(x))$, или лучше сказать $[1 : v(x)]$. В области $\mathbb{R} \times (a, b)$ это то же самое, что $[\frac{1}{v(x)} : 1]$, поскольку $v(x)$ не обнуляется. Меняя ролями переменные t и x, запишем уравнение на неизвестную функцию $t(x)$, которому отвечает это же поле направлений в рассматриваемой полосе:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v(x)}.$$

Но это простейшее дифференциальное уравнение из примера 2, для него решение задачи коши с начальным условием $t(x_0) = t_0$ имеет вид

$$t(x) - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{v(s)}.$$

Очевидно, тогда график решения — он же интегральная кривая для обоих уравнений — задается уравнением

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{v(s)}.$$

Эта формула задает интегральную кривую поля направлений исходного уравнения, а это график решения, так что формула неявно задает решение и не требуется специально это проверять. Однако в качестве упражнения можно проверить (не ссылаясь на теорему 5), что уравнение (3) задает гладкую функцию $x(t)$.

Мы поняли, как устроены решения, пока они находятся в области $\mathbb{R} \times (a, b)$ без нулей функции v. Заметим, что решения простейшего уравнения определены и монотонны на всем (a, b), поэтому соответствующие решения исходного уравнения обязаны проходить от a до b, не включительно, в прямом или обратном времени. Может ли решение покинуть эту область? Для определенности будем считать, что b конечно, т.е. $v(b) = 0$, и на (a, b) выполнено $v(x) > 0$. Тогда вопрос состоит в том, может ли решение за конечное время войти в особую точку b (граница $x = a$ исследуется аналогично). Время, потраченное на то, чтобы прийти в $b - \varepsilon$, дается формулой (3) с $x = b - \varepsilon$, так что для попадания в b, если оно произойдет, потребуется время не меньше, чем $\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{x_0}^{b-\varepsilon} \frac{ds}{v(s)} = \int_{x_0}^{b} \frac{ds}{v(s)}$. В силу того, что $v \in C^1$, имеем $v(x) = v(b) + v'(b)(x - b) + o(x - b)$ при $x \to b$. Независимо от того, равна ли $v'(b)$ нулю, существует константа $c > 0$, такая что $|v(x)| \le \frac{1}{c}|x - b|$, т.е. $\frac{1}{v(x)} \ge \frac{c}{b-x}$ в левой полуокрестности точки b, поэтому интеграл расходится по признаку сравнения. Так что в особую точку в гладком случае попасть нельзя.

Проговорим, почему задача Коши с особым начальным условием ($v(x_0) = 0$) имеет единственное решение: если решение проходит только через особые точки, то его скорость тождественно нулевая и решение сидит в одной точке x_0. А решений, попадающих в неособую точку, не бывает в силу рассуждения выше: решение не может прийти из неособой точки в особуюни ни в прямом, ни в обратном времени. $\square$

Замечание 7.

1. Мы воспользовались гладкостью только тогда, когда доказывали, что нельзя за конечное время войти в особую точку. Для случая $v \in C^0$ мы поняли, что решение задачи Коши с неособым начальным условием x_0 единственно единственно в окрестности точки t_0, т.е. в окрестности точки (t_0, x_0) есть ровно одна интегральная кривая, проходящая через эту точку. Глобально она может быть и не одна: решение может зайти в особую точку, а потом выйти из неё или не выйти (рассмотрите, например, $\dot{x} = \sqrt{|x|}$).

2. Легко видеть, что вместо гладкости v достаточно было потребовать её липшицевости: нам потребовалось только неравенство $|v(x) - v(b)| \le C|x - b|$.

3. А гёльдеровости (и тем более непрерывности) уже не хватит: у уравнения $\dot{x} = \sqrt[3]{x}$ есть ненулевые решения с нулевым начальным условием.

4. В.И. Арнольд в учебнике [A] предлагает смотреть на доказательство невозможности войти в особую точку так: мы сравниваем наше уравнение с линейным

уравнением $(\dot{x - b}) = \frac{1}{c}(x - b)$ и замечаем, что наши решения приближаются к особенности медленнее, чем решения линейного. Но решения линейного — экспоненты, которые особенности не достигают.

Предложение 8. *Если $v \in C^0$ и $v(b) = 0$, решение задачи Коши $\dot{x} = v(x);\ x(t_0) = b$ единственно тогда и только тогда, когда расходятся интегралы*

$$\int_{b\pm\varepsilon}^{b} \frac{ds}{v(s)}.$$

Доказательство. Аналогично второй части доказательства теоремы. □

Упражнение 9. *Решите задачу Коши $\dot{x} = x^2;\ x(t_0) = x_0$ и убедитесь, что решения могут не продолжаться вправо (влево) по оси времени за какую-то точку.*

Предложение 10. *(о продолжении на всю полуось времени) Пусть $v \in C^0$ и $v(x) > 0$ при $x \geq x_0$. Тогда решение задачи Коши $\dot{x} = v(x);\ x(t_0) = x_0$ продолжается на интервал $(t_0, +\infty)$ тогда и только тогда, когда расходится интеграл*

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{ds}{v(s)}.$$

Доказательство. Если интеграл расходится, формула (3) дает кривую, которая продолжается сколь угодно далеко направо: для произвольно большого t найдется соответствующий $x(t)$, т.к. интеграл в правой части формулы (3) является монотонной непрерывной функцией x. Обратно, решение обязано даваться формулой (3), так что если оно определено при любых больших t, интеграл должен расходиться. □

2 Уравнения с разделяющимися переменными и прямые произведения

Уравнение (на прямой) с разделяющимися переменными — это уравнение вида

$$x' = f(t)g(x). \tag{4}$$

Будем предполагать, что f и g — гладкие. Рассмотрим на плоскости расширенного фазового пространства область, где $f(t) \neq 0$, а в ней — автономную систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = g(x), \\ \frac{dt}{d\tau} = 1/f(t). \end{cases} \tag{5}$$

Такая система называется прямым произведением — в первое уравнение входит только первая неизвестная, а во второе — только вторая. Очевидно, эти уравнения можно решить независимо описанным выше способом. Если $g(x_0) \neq 0$, получим

$$\tau - \tau_0 = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds; \quad \tau - \tau_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{du}{g(u)}.$$

Исключая τ, получим уравнение траектории, проходящей через (t_0, x_0):

$$\int_{x_0}^{x} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds. \tag{6}$$

Теперь интерпретируем правую часть системы как векторное поле $(1/f(t), g(x))$. Траектории системы в каждой своей точке касаются векторного поля. Заметим, что это векторное поле задает поле направлений $(1, f(t)g(x))$ — но это значит, что фазовые кривые двумерной системы являются в точности[2] интегральными кривыми одномерного неавтономного уравнения с разделяющимися переменными! Значит, уравнение (6) неявно задает решения уравнения (4) в области $\{(t,x)\colon f(t)g(x) \neq 0\}$. Легко видеть[3], что и в точках, где $f(t) = 0$, решения (6) касаются поля направлений. Остается добавить решения $x \equiv x_0$, где x_0 — нули функции g. Не нарушается ли единственность на множестве $\{fg = 0\}$? Нет, но не будем это доказывать отдельно, это будет следовать из общей теоремы существования и единственности.

Решение через замену времени

Альтернативный способ получения формулы (6) — сделать замену времени. Пусть $t = h(\tau)$, тогда $x' = \frac{dx}{d\tau} = \dot{x} \cdot h'(\tau) = g(x)f(h(\tau))h'(\tau)$. Возьмем h таким, чтобы иметь $f(h(\tau))h'(\tau) = 1$. Для этого решим уравнение $h' = 1/f(h)$: $\tau - \tau_0 = \int_{h_0}^{h} f(s)\,ds$. Решения отличаются константами τ_0, h_0, годится любое. После замены времени остается уравнение $x' = g(x)$. Его решения — это $x(t) = x_0$ для $x_0 : g(x_0) = 0$ или $\tau - \tau_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{du}{g(u)}$. Для непостоянных решений вернуться к исходному времени — то же самое, что исключить τ.

Решение через интегрирование 1-форм

Формально домножим уравнение $\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$ на dt — получится $dx = f(t)g(x)dt$. Перенеся все в левую часть, получим уравнение вида $\omega = 0$, где ω — 1-форма. Такие уравнения — это уравнения на касательные вектора: в каждой точке (t, x) нас интересуют только вектора, обнуляющие линейный функционал, который 1-форма задает в этой точке. Для нашей формы $dx - f(t)g(x)dt$ — это вектора, пропорциональные $(1, f(t)g(x))$. Таким образом, новое уравнение задает то же поле направлений, что и исходное. Рассмотрим интегральную кривую, на ней возьмем любую дугу и проинтегрируем по этой дуге нашу 1-форму $dx - f(t)g(x)dt$ — это будет криволинейный интеграл 2-го рода. Переходя к римановскому интегралу, получим

$$\int_{t_0}^{t_1} [\dot{x}(t) - f(t)g(x(t))]\,dt = \int_{t_0}^{t_1} 0\,dt = 0.$$

А если бы мы взяли кривую, не являющуюся интегральной, интеграл по дуге-окрестности точки, где она не касается поля направлений, был бы ненулевым. В нашей области можно поделить форму на $g(x)$, к новой форме применимо то же рассуждение. Таким образом, интегральными являются те и только те кривые, для которых интегралы по любой дуге от форм $\frac{1}{g(x)}dx$ и $f(t)dt$ совпадают. Другими словами, это такие кривые, для которых выполнено равенство (6).

[2] Убедитесь, что если кривая касается этого поля направлений, то ее можно параметризовать так, чтобы получилось решение системы (5).

[3] Тем, кто умеет дифференцировать неявно заданную функцию.

3 Теорема существования и единственности

В этом разделе мы докажем, что в случае гладкой правой части задача Коши для уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ имеет решение, притом единственное и непрерывно зависящее от начального условия x_0 и от правой части уравнения (т.е. решение C^0-мало меняется при замене f на C^0-близкую функцию g). Обычно это обсуждение разделяется на теорему существования и единственности, теорему о продолжении и теорему о непрерывной зависимости. Мы выделим доказательство единственности в отдельное утверждение для удобства, но подчеркнем, что именно **теорема существования и единственности является краеугольным камнем теории дифференциальных уравнений**. В случае гладкой правой части имеет место гладкая зависимость от начальных условий и от параметров, но это отложим до второй половины курса.

Лемма Гронуолла

Здесь и далее евклидову норму будем обозначать $|\cdot|$ — из контекста всегда ясно, когда мы берем норму вектора.

Лемма 11. *Пусть гладкая функция $z(t)\colon (a, b) \to \mathbb{R}^n$ в момент времени $t_0 \in (a, b)$ удовлетворяет неравенству $|z(t_0)| \le r_0$ и при всех t удовлетворяет дифференциальному неравенству $|\dot{z}(t)| \le b|z(t)|$, где $b \in \mathbb{R}_+$. Тогда при всех t выполнено*

$$|z(t)| \le r_0 e^{b|t-t_0|}.$$

Доказательство. 1. Рассмотрим $t_1\colon |z(t_1)| > 0$. Если такого t_1 нет, то $z(t) \equiv 0$ и всё доказано. Будем считать, что $t_1 > t_0$. Приняв соглашение, что $\sup \emptyset = -\infty$, положим

$$t_\star = \max(t_0, \sup\{t\colon t < t_1, z(t) = 0\}).$$

2. На $(t_\star, t_1)$ имеем $|z| > 0$, так что на этом интервале $|z(t)|$ — C^1-гладкая.

3. Имеем

$$|2|z||z|^{\cdot}| = \left|(|z|^2)^{\cdot}\right| = |(z, z)^{\cdot}| = |2(\dot{z}, z)| \overset{\text{К.-Б.}}{\le} 2|\dot{z}||z|.$$

Поэтому

$$|z|^{\cdot} \le |\dot{z}| \le b|z| \text{ при } t \in (t_\star, t_1).$$

4. Рассмотрим $\psi(t) = |z(t)|e^{-b(t-t_0)}$. Так как $\dot{\psi}(t) = e^{-b(t-t_0)}(|z|^{\cdot} - b|z|) \le 0$, функция не возрастает. Заметим, что $\psi(t_\star)$ равно $|z(t_0)|$, если $t_\star = t_0$, и равно 0, если $t_\star > t_0$. Но тогда

$$|z(t_1)| = \psi(t_1)e^{b(t_1-t_0)} \le \psi(t_\star)e^{b(t_1-t_0)} \le r_0 e^{b(t_1-t_0)}.$$

Рассуждение для $t_1 < t_0$ аналогично. □

Упражнение 12. *Докажите следующее усиление леммы Гронуолла. Пусть $z(t)$ удовлетворяет неравенству $|\dot{z}(t)| \le b|z(t)| + d$, $b > 0, d \ge 0$, и неравенство $|z(t_0)| \le r_0$ тоже выполнено. Тогда для любого t:*

$$|z(t)| \le r_0 e^{b|t-t_0|} + \frac{d}{b}\left(e^{b|t-t_0|} - 1\right).$$

Указание: провести рассуждение так же, но рассмотреть $\psi(t) = (|z(t)| + d/b)e^{-b|t-t_0|}$.

Теорема единственности

Теорема 13 (Теорема единственности)**.** *Пусть f непрерывна и липшицева по x.*[4] *Тогда решение задачи Коши*
$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
единственно в том смысле, что любые два решения совпадают на пересечении областей определения.

Доказательство. Рассмотрим два решения нашей задачи Коши $x(t), y(t)$ и применим лемму Гронуолла к функции $z = x - y$. Действительно, в начальный момент выполнено $|z(t_0)| = 0$ и на пересечении областей определения имеем $|\dot{z}| = |\dot{x} - \dot{y}| = |f(t,x) - f(t,y)| \le L|x-y| = L|z|$, так что лемма применима и дает $|x(t) - y(t)| \le 0$. □

Замечание 14. Теорема верна для $f \in C^1$. Хотя функция $f \in C^1$ не обязательно глобально липшицева (в целом и по x в частности), она липшицева на любом компакте внутри области определения. Если в гладком случае два решения задачи Коши где-то перестают совпадать, то мы это увидим, ограничившись рассмотрением какого-то компакта. Но по доказанной теореме такого не бывает.

Теорема существования

Теорема 15 (Теорема существования)**.** *Пусть f непрерывна и Липшицева по x в области D. Тогда для любых $(t_0, x_0) \in D$ задача Коши*
$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
имеет решение (притом единственное, как уже доказано).

Замечание 16. Сразу же заметим, что имеет место более сильная теорема существования Пеано: для существования решения достаточно лишь непрерывности функции f. Как уже было сказано выше, в этом случае решение может быть не единственным.

Доказательство. Идея состоит в том, чтобы рассмотреть приближения Пикара
$$x_0(t) \equiv x_0, \quad x_{i+1} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_i(s))\, ds, \quad i = 1, 2, \dots$$
и убедиться, что эти функции C^0-сходятся некоторой функции $x_\star$, которая является решением задачи Коши.[5]

Дело в том, что предельная функция $x_\star$ должна будет удовлетворять интегральному уравнению
$$x_\star = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_\star(s))\, ds,$$

[4] Т.е. существует $L > 0$, т.ч. $\forall t, x, y\colon |f(t,x) - f(t,y)| \le L|x-y|$.

[5] На всякий случай заметим, что интеграл от вектор-функции $f(\dots)$ берется *покомпонентно*, обобщения известной нам теории интеграла не требуется.

а оно равносильно задаче Коши (проверьте). Заметим, что непрерывное решение интегрального уравнения автоматически оказывается гладким, потому что $s \mapsto f(s, x_\star(s))$ непрерывна, а потому интеграл непрерывно дифференцируем.

Чтобы доказать сходимость пикаровских приближений, поймем, что они образуют орбиту некоторого сжимающего оператора A, и применим теорему Банаха о сжимающем отображении[6]. Естественно, оператор A должен переводить функцию $\varphi(t)$ в функцию

$$A\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds.$$

Надо только правильно выбрать пространство, на котором оператор будет действовать. Положим $m = \max_D |f|$ — если f не ограничена или максимум не достигается, заменим D на содержащийся в D замкнутый шар радиуса r с центром в (t_0, x_0). Подобрав константу $d > 0$, возьмем пространство

$$X = \{\varphi(t) \in C^0(\underbrace{[t_0 - d, t_0 + d]}_{I}, \mathbb{R}^n) \mid \forall t \in I\colon\ |\varphi(t) - x_0| \le m|t - t_0|\}.$$

Здесь d надо выбрать таким, чтобы графики функций $\varphi \in X$ содержались в D — достаточно взять $d \le \frac{r}{\sqrt{m^2+1}}$. Так как X — подмножество в C^0, метрика задается sup-нормой. Легко видеть (проверьте, перейдя при каждом $t \in I$ к пределу в неравенстве из определения X), что это замкнутое подмножество, так что оно полно как метрическое пространство. Осталось убедиться, что A переводит X в себя и сжимает:

1. $A(X) \subset X$: из определения A в силу выбора d видно, что $A\varphi$ определена на I и непрерывна. Для всех $t \in I$

$$|A\varphi(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)\, ds \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi(s)|\, ds \right| \le m|t - t_0|.$$

Поэтому $A\varphi \in X$. Тут использовано, что норма интеграла не больше интеграла от нормы[7].

2. $\exists \lambda \in (0,1)\colon \|A\varphi_1 - A\varphi_2\|_\infty \le \lambda \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$:

$$\forall t \in I\colon |A\varphi_2(t) - A\varphi_1(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (f(s, \varphi_2(s)) - f(s, \varphi_1(s)))\, ds \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi_2(s)) - f(s, \varphi_1(s))|\, ds \right| \le$$

$$\le \left| \int_{t_0}^{t} L|\varphi_2(s) - \varphi_1(s)|\, ds \right| \le Ld\|\varphi_2 - \varphi_1\|_\infty.$$

Считаем, что мы взяли $d \le \frac{1}{L+1}$, так что $\lambda = Ld < 1$.

Применяя теорему Банаха, получаем единственную неподвижную точку $x_\star$: $x_\star = Ax_\star$. Но это равенство — это ровно интегральное уравнение, непрерывные решения которого являются решениями задачи Коши. Существование решения доказано. □

[6] Теорема Банаха говорит, что сжимающее отображение непустого полного метрического пространства в себя имеет ровно одну неподвижную точку

[7] Например, рассмотрите интегральные суммы, напишите неравенство треугольника и перейдите к пределу.

Упражнение 17. *Дополните доказательство теоремы так, чтобы получился вывод о единственности в обычном смысле совпадения решений на пересечении областей определения. Уже доказанная единственность решения-неподвижной-точки — более слабое утверждение.*

Замечание 18. То же доказательство проходит в случае $I = [t_0, t_0 + d]$ или $I = [t_0 - d, t_0]$, притом такое решение в силу доказываемой единственности должно совпасть с ограничением решения, построенного для $I = [t_0 - d, t_0 + d]$. Таким образом, если у нас есть непрерывное решение интегрального уравнения на $I = [t_0 - d, t_0]$ и в окрестности правого конца его графика выполнены условия теоремы, его можно продолжить вправо за $t_0 + d$ решением-неподвижной-точкой из доказательства.

Локальная теорема о непрерывной зависимости от начального условия

Ровно тот же метод позволяет доказать более сильную теорему.

Теорема 19. *В условиях теоремы существования и единственности существуют замкнутый шар в фазовом пространстве $B \ni x_0$ и отрезок времени $I = [t_0 - d, t_0 + d]$, такие что для любого $\hat{x} \in B$ задача Коши $\dot{x} = f(t, x),\ x(t_0) = \hat{x}$ имеет единственное определенное на I решение $\varphi_{\hat{x}}(t)$, непрерывно зависящее от $\hat{x}$ как элемент $C^0(I, \mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Доказательство во многом повторяет доказательство предыдущей теоремы. Берем B так, чтобы $\{t_0\} \times B \subset D$, берем прямоугольную окрестность $\Pi = U_\varepsilon(t_0) \times U_\varepsilon(B)$ множества $\{t_0\} \times B$, тоже содержащуюся в D, полагаем m равным максимуму $|f|$ на замыкании этой окрестности, и рассматриваем пространство

$$X = \{\varphi(t, \hat{x}) \in C^0(I \times B, \mathbb{R}^n) \mid \forall t \in I, \hat{x} \in B\colon\ |\varphi(t, \hat{x}) - \hat{x}| \le m|t - t_0|\},$$

где d взят столь малым, чтобы множества значений функций $\varphi \in X$ не выходили за пределы Π. На X заводим оператор

$$\varphi \mapsto A\varphi\colon A\varphi(t, \hat{x}) = \hat{x} + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s, \hat{x}))\, ds.$$

Проверяем, что X полно, а A отображает его в себя и сжимает, так же, как в предыдущей теореме. Неподвижная точка $\varphi(t, \hat{x})$ этого оператора является совокупностью решений всех интересующих нас задач Коши: искомое решение $\varphi_{\hat{x}}(\cdot)$ — это просто функция $\varphi(\cdot, \hat{x})$.

Наконец, $I \times B$ — компакт, а наша неподвижная точка — непрерывная функция. Значит, равномерно непрерывная. Но тогда для близких $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ независимо от $t \in I$ значения $\varphi(t, \hat{x}_1)$ и $\varphi(t, \hat{x}_2)$ близки, т.е. отображение $\hat{x} \mapsto \varphi_{\hat{x}}(\cdot)$ непрерывно в смысле C^0-метрики на решениях. □

4 Теоремы о продолжении и теоремы о непрерывной зависимости

Теорема о продолжении до границы компакта

Теорема 20. *Пусть в условиях теоремы существования и единственности $K \subset D$ — компакт и $(t_0, x_0) \in K$. Тогда решение задачи Коши с начальным условием*

$x(t_0) = x_0$ продолжается вперед и назад во времени до выхода на границу компакта (т.е. существует решение φ этой задачи Коши и моменты времени $t_- \le t_0 \le t_+$, такие что $(t_\pm, \varphi(t_\pm)) \in \partial K$).

Доказательство.

- Если $(t_0, x_0) \in \partial K$, утверждение сразу следует из теоремы существования и единственности.

- Пусть $(t_0, x_0) \in \operatorname{Int} K$. Рассмотрим все решения $\psi\colon (a_\psi, b_\psi) \to \mathbb{R}^n$ нашей задачи Коши, графики которых содержатся в $\operatorname{Int}(K)$. Построим по ним решение φ на $(a, b) = \cup_\psi (a_\psi, b_\psi)$: положим $\varphi = \psi$ на (a_ψ, b_ψ) — определение корректно в силу единственности. В силу компактности K a и b конечны.

- Рассмотрим последовательность $(a, b) \ni t_n \to b$ и последовательность $\varphi(t_n)$. По теореме о конечных приращениях выполнено $|\varphi(t_k) - \varphi(t_n)| \le m|t_k - t_n|$, где $m = \max_K |f|$. Поэтому фундаментальность (t_n) влечет фундаментальность $(\varphi(t_n))$. Поскольку тут последовательность (t_n) произвольна, предел последовательности $(\varphi(t_n))$ от нее не зависит (иначе, объединяя две последовательности $(\varphi(t_n))$ с разными пределами, получим расходящуюся). Значит, существует предел $\lim\limits_{t \to b-0} (t, \varphi(t)) = (b, x_b)$. Доопределим φ в b по непрерывности.

- Пусть $(b, x_b) \in \operatorname{Int}(K)$. Тогда в малой полуокрестности $[b - d, b]$ функция φ является решением интегрального уравнения, связанного с задачей Коши с н.у. $x(b) = x_b$.[8] По теореме существования и единственности, в полной окрестности b определено решение этой задачи — с его помощью можно продолжить φ за точку b (см. замечание 18), но это противоречит построению φ.

- Значит, $(b, x_b) \in \partial K$. По сути мы продолжили решение вперед по времени до границы K. Если нужно решение, определенное на интервале, продолжим его за b решением задачи Коши с н.у. $x(b) = x_b$.

$\square$

Теорема 21. *Пусть в области $D = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$ функция $f(t, x)$ непрерывна, липшицева по x на любом компакте и удовлетворяет неравенству $|f(t, x)| \le a(t)|x| + b(t)$, где $a(t), b(t)$ — непрерывные функции. Тогда любое решение уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $(t_0, x_0) \in D$ продолжается на весь интервал (α, β).*

Доказательство.

- Рассмотрим начальное условие (t_0, x_0) и произвольный содержащий t_0 отрезок $[t_1, t_2] \subset (\alpha, \beta)$. Достаточно доказать, что решение задачи Коши продолжается на отрезок.

- Положим $A = \max_{[t_1, t_2]} |a(t)|,\ B = \max_{[t_1, t_2]} |b(t)|$. По теореме существования и единственности, существует решение задачи Коши, определенное в окрестности t_0. Рассмотрим пересечение области определения любого решения φ задачи Коши с отрезком. По лемме Гронуолла (из упражнения), там выполнено

$$|\varphi(t)| \le |x_0| e^{A(t_2 - t_1)} + \frac{A}{B}(e^{A(t_2 - t_1)} - 1) \le C - 1,$$

где C — большая константа.

[8] Так как φ является решением уравнения, для $t \in [b - d, b)$ при малом $\varepsilon > 0$ выполнено $\varphi(t) - \varphi(b - \varepsilon) = \int_{b-\varepsilon}^t f(s, \varphi(s))\, ds$. Можно перейти к пределу $\varepsilon \to 0 + 0$ — получится нужное интегральное уравнение.

- По теореме о продолжении, решение продолжается до границы компакта $K = [t_1, t_2] \times \{x\colon |x| \le C\}$. В силу неравенства решение не может выйти на «горизонтальную» часть границы, где $|x| = C$, поэтому оно достигает плоскостей $\{t = t_1\}$ и $\{t = t_2\}$, т.е. продолжается на весь отрезок.

□

Непрерывная зависимость от начального условия и правой части уравнения

Теорема 22. *Пусть задача Коши $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ имеет решение φ, определенное на отрезке $I \ni t_0$. Пусть в трубчатой окрестности его графика $V = \{(t,x) \mid t \in I, |x - \varphi(t)| \le r\}$ функция f непрерывна и липшицева по x. Пусть функция $g(t,x)$ тоже непрерывна и липшицева по x в V. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что, если выполнены условия 1) $\|f - g\|_{C^0(V,\mathbb{R}^n)} \le \delta$, 2) $|x_0 - y_0| \le \delta$, то задача Коши $\dot{x} = g(t,x)$, $x(t_0) = y_0$ имеет решение ψ, определенное на I, и ε-близкое к φ: $\|\varphi - \psi\|_{C^0(I,\mathbb{R}^n)} \le \varepsilon$.*

Доказательство. Доказательство похоже на доказательство предыдущей теоремы. Считаем, что $t_0 \in \mathrm{Int}(I)$, иначе требуется небольшая модификация рассуждения — продумайте сами. При малом δ начальная точка (t_0, y_0) лежит в $\mathrm{Int}(V)$. По теореме о продолжении решение второй задачи Коши продолжается до ∂V — будем считать, что область определения решения — отрезок между точками первого выхода на границу. На этом отрезке применяем лемму Гронуолла к функции $\varphi - \psi$. Так как $|(\varphi - \psi)(t_0)| = |x_0 - y_0| \le \delta$ и

$$|(\varphi(t) - \psi(t))^{\cdot}| = |f(t,\varphi(t)) - g(t,\psi(t)))| \le$$

$$\le |f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t)))| + |f(t,\psi(t)) - g(t,\psi(t)))| \le L|\varphi(t) - \psi(t)| + \delta,$$

лемма даёт

$$\|\varphi - \psi\|_{C^0} \le \delta \left(e^{L|I|} + \frac{1}{L}(e^{L|I|} - 1) \right) = C\delta.$$

При малом δ выполнено $C\delta < r$, так что график ψ не выходит на горизонтальную часть границы V, а значит ψ продолжается на весь отрезок I. Также при малом δ выполнено $C\delta < \varepsilon$, что дает требуемую близость между решениями двух задач Коши. □

Рассмотрим задачу Коши, где уравнение и начальное условие непрерывно зависят от (возможно, многомерного) параметра $\mu \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,\mu), \\ x(t_0) = a(\mu), \end{cases} \tag{7}$$

f непрерывна по совокупности переменных и липшицева по x, $a(\cdot)$ непрерывна. Решение тоже будет зависеть от параметра — обозначим его $\varphi(t,\mu)$.

Теорема 23. *Пусть при $\mu = \mu_0$ задача Коши $\dot{x} = f(t,x,\mu_0)$, $x(t_0) = a(\mu_0)$ имеет решение $\varphi(\cdot,\mu_0)$, определенное на отрезке I; $M \ni \mu_0$ — компакт; для некоторого радиуса r в произведении трубчатой окрестности $V = \{(t,x) \mid t \in I, |x - \varphi(t,\mu_0)| \le r\}$*

его графика и M функция f непрерывна по совокупности переменных и липшицева по x, а функция a непрерывна в M. Тогда для μ из малой окрестности $U_\sigma(\mu_0)$ начального значения параметра задача Коши (7) имеет решение $\varphi(\cdot,\mu)$, определенное на I, и отображение $I\times U_\sigma(\mu_0)\ni(t,\mu)\mapsto\varphi(t,\mu)\in\mathbb{R}^n$ непрерывно.

Доказательство. Если $\|\mu-\mu_0\|$ мало, то в силу равномерной непрерывности f на компакте $V\times M$ имеем $\|f(\cdot,\cdot,\mu)-f(\cdot,\cdot,\mu_0)\|_{C^0(V)}<\delta$. В силу непрерывности $a(\cdot)$ также будет выполнено $|a(\mu)-a(\mu_0)|<\delta$. Если δ выбрано правильно, по предыдущей теореме получим, что решение $\varphi(\cdot,\mu)$ определено на I и его график содержится в V (да еще и вместе со своей малой трубчатой окрестностью, так что к μ тоже можно будет применить предыдущую теорему) и ε-близок к графику $\varphi(\cdot,\mu_0)$. Таким образом, функция $\varphi(t,\mu)$ определена, где нужно. Проверим непрерывность. Возьмем $\tilde\mu$, близкое к μ, и τ, близкое к $t\in I$, положим $m=\max_{V\times M}|f|$ и запишем

$$|\varphi(\tau,\tilde\mu)-\varphi(t,\mu)|\le|\varphi(\tau,\tilde\mu)-\varphi(t,\tilde\mu)|+|\varphi(t,\tilde\mu)-\varphi(t,\mu)|\le m|\tau-t|+\varepsilon.$$

Одно слагаемое оценили по теореме о конечных приращениях, второе мало в силу предыдущей теоремы. □

Замечание 24. Заметим, что рассуждение про непрерывность из доказательства теоремы 23 проходит, если в роли параметра выступает пара из правой части уравнения и начального условия: $\mu=(f,\hat x)\in C^0(V,\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$. Имеется в виду, что первая компонента этого μ идёт функцией в правую часть уравнения, а вторая — в начальное условие: $a(\mu)=\hat x$. Шары в пространстве параметра теперь некомпактны, но это и не нужно, потому что близость правых частей в первом шаге рассуждения получается тавтологически как близость первых компонент параметра. Это незначительно усиливает вывод теоремы 22 до: значение решения — непрерывная функция от времени, начального условия и правой части уравнения.

Следствие 25. *(глобальная непрерывная зависимость от начального условия) Пусть задача Коши $\dot x=f(t,x)$, $x(t_0)=x_0$ имеет решение $\varphi(\cdot,x_0)$, определенное на отрезке I, и для некоторого радиуса r в трубчатой окрестности $V=\{(t,x)\mid t\in I,|x-\varphi(t,x_0)|\le r\}$ его графика функция f непрерывна по совокупности переменных и липшицева по x. Тогда для $\hat x$ из малой окрестности $U\ni x_0$ задача Коши с начальным условием $\hat x$ имеет решение $\varphi(\cdot,\hat x)$, определенное на I, и отображение $(t,\hat x)\mapsto\varphi(t,\hat x)$ непрерывно.*

Доказательство. Применяем теорему 23 с $\mu=\hat x$, $f(t,x,\mu)\equiv f(t,x)$, $a(\mu)=\hat x$. □

Замечание 26. Таким образом, из теоремы о непрерывной зависимости от параметра следует теорема о непрерывной зависимости от начальных условий. Обратный вывод тоже можно провести. Перейдем от задачи Коши (7) к задаче Коши

$$\begin{cases}\dot x=f(t,x,u),\\ \dot u=0,\\ x(t_0)=a(\mu),\\ u(t_0)=\mu.\end{cases}\tag{8}$$

Тут в качестве неизвестного выступает пара (x,u), а в правой части параметра уже нет. Очевидно, что $u(t)\equiv\mu$, так что иксовая компонента решения будет решением первой задачи Коши. Есть небольшой подвох в том, что мы хотим липшицевость правой части в (8), но в условиях теоремы 23 её не дано. Упражнение: убедиться, что для правой части такого вида, как в (8) доказательство теоремы существования и единственности проходит, если f липшицева только по x, — из-за того, что никакого движения по u не происходит.

Замечание 27. Если уравнение имеет решение $\varphi(\cdot)$, определенное на $[t_0, t_1]$, то в малой окрестности точки $x_0 = \varphi(t_0)$ определено отображение $g_{t_0}^{t_1}\colon x \mapsto \varphi(t_1, x)$, где $\varphi(t, x)$ — из теорем выше. Отображение $g_{t_0}^{t_1}$ содержит информацию про то, что происходит с точками части фазового пространства за время от t_0 до t_1. Оно так и называется — *преобразование за время от* t_0 *до* t_1. Для автономного уравнения в силу инвариантности поля направлений относительно горизонтальных сдвигов легко видеть, что такие отображения с одинаковой разностью $t_1 - t_0$ совпадают. Поэтому рассматривают семейство отображений $\{g^\tau\}$, где $g^{t_1 - t_0} = g_{t_0}^{t^1}$, которое называется *локальным фазовым потоком* векторного поля, связанного с автономным уравнением. Заметим, что, например, если мы рассмотрим отрезок нулевого решения уравнения $\dot{x} = x^2$ для $t \in [t_0, t_1]$, это отображение будет определено в окрестности $x_0 = 0$. Для начальных условий $\hat{x} > 0$ из этой окрестности решения сначала дойдут до сечения $\{t = t_1\}$, а уже потом уйдут на $+\infty$. Если же мы выйдем из малой окрестности $x_0 = 0$, то встретим решения, которые уходят на бесконечность до момента $t = t_1$. Таким образом, отображения фазового потока (и в более общем случае отображения $g_{t_0}^{t_1}$) определены лишь локально.

5 Однородные уравнения на прямой

Однородным называется уравнение вида $\dot{x} = F(x/t)$. Соответствующее поле направлений постоянно на прямых, проходящих через ноль, т.е. инвариантно относительно линейных отображений вида $(t, x) \mapsto (\lambda t, \lambda x)$. Можно немного расширить рассматриваемый класс уравнений, требуя инвариантности поля направлений только для гомотетий с $\lambda > 0$.

Предложение 28. *Однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой* $p = \frac{x}{t}$.

Доказательство. Подставим в уравнение $x = pt$:

$$\dot{p}t + p = F(p); \qquad \dot{p} = \frac{F(p) - p}{t}.$$

Таким образом, имеются постоянные решения $p(t) \equiv p_0$, где $F(p_0) = p_0$, и решения вида

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{F(p) - p} = \ln|t/c|$$

для $p_0\colon F(p_0) - p_0 \neq 0$. Обратная замена превращает постоянные решения в проходящие через ноль лучи, разбивающие плоскость на сектора, в которых живут семейства гомотетичных друг другу интегральных кривых. $\square$

Уравнения с группой симметрий

Однородное уравнение — пример уравнения с группой симметрий. Симметрия уравнения — это отображение, переводящее поле направлений уравнения в себя. Однопараметрическая группа симметрий — это однопараметрическая группа диффеоморфизмов, состоящая из симметрий уравнения.

Определение 29. Однопараметрическая группа диффеоморфизмов — это гладкое действие $(s, x) \mapsto g^s(x)$ группы $\mathbb{R}$ диффеоморфизмами на X:

- действие: $g^{s+t}(x) = g^s \circ g^t(x); \quad g^0(x) = x \qquad \forall x \in X,\ s, t \in \mathbb{R}$;
- гладкое: $(s, x) \mapsto g^s(x)$ — гладкое отображение;
- диффеоморфизмами: $x \mapsto g^s(x)$ — диффеоморфизм X в себя.

Еще до однородных уравнений мы сталкивались с уравнениями с группой симметрий: поле направлений простейших уравнений инвариантно относительно вертикальных сдвигов, а поле направлений автономных — относительно горизонтальных. Оказывается, если у уравнения есть какая-то группа симметрий, то локально можно сделать замену координат, превращающую симметрии в горизонтальные (при желании можно и в вертикальные) сдвиги — тогда в новых координатах уравнение станет автономным.

Точка называется *стационарной* для группы диффеоморфизмов, если все отображения группы диффеоморфизмов оставляют ее на месте.

Теорема 30. *Пусть у уравнения на прямой есть однопараметрическая группа симметрий гладкости C^2. Тогда уравнение интегрируется в малой окрестности нестационарной точки для этой группы.*

Доказательство. Пусть A — наша нестационарная точка. Рассмотрим её траекторию под действием группы: $T = \{g^s(A)\}$. Это регулярная гладкая кривая.[9] Проведем через точку A другую гладкую регулярную кривую $\Gamma = \{\gamma(q)\}$ *трансверсально* T, т.е. так, чтобы в точке A не было касания; будем считать, что параметр q обнуляется в точке A: $\gamma(0) = A$. Рассмотрим отображение

$$(s, q) \overset{\Phi}{\mapsto} g^s(\gamma(q)).$$

Мы проверим, что это локальный диффеоморфизм окрестности нуля в координатах (s, q) на окрестность точки A. Движению произвольной точки x под действием группы симметрий $s \mapsto g^s(x)$ в новых координатах соответствует просто горизонтальное движение с единичной скоростью $s \mapsto (s, q)$, т.е. в новых координатах группа превращается в группу горизонтальных сдвигов. Поле направлений, инвариантное

[9] Рассмотрим C^1-гладкое векторное поле $x \mapsto \left.\frac{d(g^s(x))}{s}\right|_{s=0}$. Оно задает автономное уравнение, для которого траектории группы служат траекториями (докажите). Из теоремы существования и единственности тогда следует, что есть особые неподвижные решения и решения, траектории которых являются регулярными кривыми (решение дает параметризацию, у которой вектор скорости не обнуляется).

относительно горизонтальных сдвигов,[10] — это поле направлений автономного уравнения. Поэтому после замены координат получится автономное уравнение, которое интегрируется (известна формула решения). Может быть неочевидно, что после замены получится уравнение, разрешенное относительно производной, — это можно проверить непосредственно.

Проверим, что Φ — локальный диффеоморфизм. Очевидно, что это гладкое отображение. Посмотрим на его производную в нуле. Имеем

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial q}\right|_{(0,0)} = (g^0)'_x \circ \gamma'(0) = \gamma'(0); \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{d(g^s(x))}{s}\right|_{s=0}.$$

Так как Γ по построению трансверсальна T, это ненулевые неколлинеарные вектора, значит, якобиан отображения Φ в нуле ненулевой. Значит, это локальный диффеоморфизм. Остается убедиться,[11] что, когда в уравнении $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ мы делаем замену $t = t(s,q),\ x = x(s,q)$, мы получаем уравнение

$$\frac{dq}{ds} = \left.\frac{t'_s f - x'_s}{x'_q - t'_q f}\right|_{(t,x)=(t(s,q),x(s,q))}$$

и никакой проблемы с разрешенностью относительно производной не возникает. □

6 Пфаффовы уравнения и уравнения в полных дифференциалах

Уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ задает векторное поле в области, где P и Q не обнуляются одновременно. В каждой точке выделяется направление, состоящее из векторов, на которых обнуляется линейный функционал, в который в этой точке превращается 1-форма $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Точки, где $(P,Q) = 0$, называются особыми: там форма превращается в нулевой функционал и не задает никакого направления. Такое уравнение называется пфаффовым. Заметим, что аналогичное уравнение в пространстве большей размерности задает не поле направлений, а поле гиперплоскостей (также говорят распределение), а для него уже не обязательно существуют интегральные поверхности той же размерности. Таким образом, этот раздел касается только двумерного случая.

Замечание 31. Интегральные кривые пфаффова уравнения $P(x,y)dx+Q(x,y)dy = 0$ совпадают с интегральными кривыми уравнений $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ или $\frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ там, где эти уравнения определены. Действительно, любые два из трех уравнений в области, где оба определены, задают одно и то же поле направлений.

Определение 32. Дифференциальная 1-форма называется точной в области D, если она является дифференциалом некоторой функции в этой области: $\omega = dF$.

[10]Убедитесь (в одну строку, используя опрделение действия диффеоморфизма на вектора/прямые), что при замене координат симметрия переходит в симметрию, т.е. что симметрия, сопряженная отображением замены, переводит переписанное в новых координатах поле направлений в себя.

[11]Можно, например, исходное уравнение переписать как пфаффово, потом от уравнений замены перейти к равенствам дифференциалов и исключить dx, dt из трех уравнений. Но почему?

Предложение 33. *Интегральные кривые уравнения $\omega = 0$ с точной формой $\omega = dF$ в области без особых точек — это в точности линии уровня потенциала F.*

Доказательство. Из теоремы о неявной функции следует, что в окрестности неособой точки (x_0, y_0) (где градиент ненулевой) потенциала его множества уровня являются линиями (одномерными подмногообразиями), притом эти линии ортогональны градиенту потенциала. Так как пфаффово уравнение имеет вид $F'_x dx + F'_y dy$, линии уровня являются интегральными кривыми. Через любую достаточно близкую точку (x_1, y_1) тоже проходит линия уровня, которая является интегральной кривой. Если бы существовала другая интегральная кривая, проходящая через эту точку, то для одного из уравнений из замечания выше не выполнялось бы заключения теоремы существования и единственности. Предполагая, что P, Q — C^1-гладкие функции, заключаем, что это невозможно. □

Определение 34. Дифференциальная 1-форма $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ называется замкнутой, если её дифференциал[12] нулевой, т.е. $P'_y = Q'_x$.

Точная форма с C^2-гладким дифференциалом замкнута в силу равенства смешанных вторых частных производных дифференциала.

Согласно следующей лемме, в односвязной области замкнутая форма является точной. Лемма дает способ проверки на точность (через замкнутость) и способ нахождения потенциала.

Теорема 35 (Лемма Пуанкаре)**.** *Пусть форма ω замкнута в односвязной области D. Тогда она точна в D.*

Доказательство. Эта лемма верна в произвольной размерности, но мы докажем её для размерности 2 и в случае, когда область — прямоугольник. Как обсуждалось в курсе математического анализа, наличие потенциала равносильно независимости интеграла от формы от пути интегрирования. Поэтому естественно искать потенциал как интеграл по какому-то просто устроенному пути. Будем рассматривать путь, который начинается в точке (x_0, y_0) и идет в точку (x, y) сначала горизонтально, потом вертикально. Криволинейный интеграл 2-го рода от ω запишется тогда как

$$F(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)\, d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, \eta)\, d\eta.$$

Проверим, что получился потенциал. Очевидно, $F'_y(x,y) = Q(x,y)$. Далее,

$$F'_x(x,y) = P(x, y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} Q'_x(x,\eta)\, d\eta = P(x, y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} P'_y(x,\eta)\, d\eta =$$

$$= P(x, y_0) + P(x,y) - P(x, y_0) = P(x,y).$$

□

Упражнение 36. *Докажите лемму Пуанкаре для звездчатой плоской области. Рассмотрите интеграл вдоль отрезка, соединяющего центр области с точкой (x, y). Также рассмотрите дифференциал функции $t \mapsto tP(tx, ty)$ (это указание).*

[12] Что такое дифференциал 1-формы (это 2-форма), вам расскажут в курсе анализа на многообразиях.

7 Линейные уравнения на прямой

Оператор называется линейным, если он действует между векторными пространствами над одним и тем же полем и согласован с операциями в них: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ u, v \in V\colon L(\alpha u + \beta v) = \alpha L u + \beta L v$. Уравнение вида $Lu = 0$ называется *линейным однородным уравнением*, а уравнение вида $Lu = b$, где $b \neq 0$ известен, — *линейным неоднородным*.

Предложение 37. *Решения линейного уравнения $Lu = 0$ образуют векторное пространство $\operatorname{Ker} L$, а решения соответствующего неоднородного уравнения $Lu = b$ — аффинное пространство $u_{\text{ч.р.н.}} + \operatorname{Ker} L$, где $u_{\text{ч.р.н.}}$ — любое одно (говорят: «частное») решение неоднородного уравнения.*

Доказательство. Проверка того, что ядро — линейное подпространство в области определения, тривиальна: $u, v \in \operatorname{Ker} L \Rightarrow L(\alpha u + \beta v) = 0 + 0 = 0$. Далее, для любого v: $L(u_{\text{ч.р.н.}} + v) = b \Leftrightarrow Lv = 0 \Leftrightarrow v \in \operatorname{Ker} L$. □

Рассмотрим теперь общее уравнение на прямой

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \quad a, b \in C^0(D).$$

Непрерывность a, b влечет непрерывность правой части и её липшицевость по x на любом компакте, так что применима теорема существования и единственности. Чтобы найти все решения, достаточно найти общее решение соответствующего однородного уравнения $\dot{x} = a(t)x$ и частное решение неоднородного.

Общее решение однородного линейного уравнения на прямой

Уравнение $\dot{x} = a(t)x$ — это уравнение с разделяющимися переменными. Есть особое решение $x \equiv 0$. В областях $\{x \neq 0\}$ решение имеет вид

$$\int \frac{dx}{x} = \int a(t)\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln|x| = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds + C \quad \Leftrightarrow$$

$$|x| = Ce^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds},\ C > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = Ce^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds},\ C \neq 0.$$

Добавляем особое решение к остальным, разрешая C быть нулем. По единственности других решений нет. Общее решение: $x = Ce^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$, $C \in \mathbb{R}$. Легко видеть, что решение задачи Коши с н.у. (t_0, x_0) есть $x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$. Заметим, что при решении дифференциальных уравнений принято заменять произвольную постоянную C по ходу решения на новую, не проговаривая этой замены.

Частное решение неоднородного уравнения: метод вариации постоянной

Для краткости обозначим $\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$. *Проварьируем* в формуле $C\varphi(t)$ общего решения однородного постоянную C — заменим ее на функцию $c(t)$ и будем искать решение неоднородного в виде $c(t)\varphi(t)$. Если мы найдем хотя бы одно, дело сделано и не надо беспокоиться о том, что мы ограничились поисками решения «специального вида». На самом деле, мы не ограничиваем себя, потому что просто делаем в уравнении замену $x(t) = c(t)\varphi(t)$, где $c(t)$ — новая неизвестная. Подставляем $x = c\varphi$ в неоднородное уравнение и имеем

$$\dot{c}\varphi + c\dot{\varphi} = ac\varphi + b \quad \Leftrightarrow \quad \dot{c}\varphi = b \quad \Leftrightarrow \quad \dot{c} = \frac{b}{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad c(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-\int_{t_0}^{s} a(\xi)\,d\xi}\,ds + c_0.$$

Возьмем решение с нулевым начальным условием $x(t) = \varphi(t)\int_{t_0}^{t}(b(s)/\varphi(s))\,ds$ и запишем общее решение неоднородного уравнения (оно же — решение задачи Коши):

$$x_{\text{о.р.н.}} = x_{\text{ч.р.н.}} + \text{общ. реш. одн.} = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-\int_{t_0}^{s} a(\xi)\,d\xi}\,ds\right).$$

Здесь $x_0 \in \mathbb{R}$ — произвольная постоянная. Заметим, во-первых, что решения определены этой формулой на всей области определения D функций a, b, которую мы считаем промежутком (в скобках заметим, что из теоремы 21 следует, что решение продолжается на эту область). Во-вторых, отображение соответствия, которое начальному условию $\hat{x}$ сопоставляет значение решения в фиксированный момент времени t_1: $\hat{x} \mapsto \varphi(t_1, \hat{x})$, — определено глобально и является аффинным:

$$\hat{x} \mapsto A\hat{x} + B.$$

Периодические линейные уравнения на прямой

Будем теперь дополнительно предполагать, что в уравнении $\dot{x} = a(t)x + b(t)$ функции a, b — T-периодические. Есть ли в таком случае у уравнения периодические решения и что можно сказать об их свойствах? Заметим, что связанное с уравнением поле направлений, а следовательно, и разбиение расширенного фазового пространства на интегральные кривые, инвариантны относительно горизонтальных сдвигов на T. Можно факторизовать плоскость t, x по этому сдвигу и считать, что расширенное фазовое пространство — цилиндр.

Рассмотрим отображение $M = g_{t_0}^{t_0+T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *монодромии за период*, переводящее начальное условие x_0 в точку фазового пространства, через которую соответствующее решение проходит в момент $t_0 + T$. Это аффинное отображение $x \mapsto Ax + B$, где, как видно из формулы общего решения,

$$A = e^{\int_{t_0}^{t_0+T} a(s)ds}, \quad B = e^{\int_{t_0}^{t_0+T} a(s)ds} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} (b(s)/\varphi(s))ds.$$

Видно, что $A > 0$. Если $A \neq 1$, отображение монодромии имеет единственную неподвижную точку $x_\star = \frac{B}{1-A}$ — она экспоненциально притягивает все остальные точки при $A < 1$ и отталкивает при $A > 1$. Ясно, что неподвижной точке этображения монодромии соответствует T-периодическое решение $\varphi_\star$. Чуть менее очевидно, что других периодических решений нет — докажем это. Будем считать, что $A < 1$ (иначе обратим время), и рассмотрим точку фазового пространства x_0, отличную от $x_\star$: ее образы под действием отображения монодромии становятся близки к $x_\star$, так что растущие из них отрезки графика решения, отвечающие интервалам времени

$[t_0 + nT, t_0 + (n+1)T]$, в силу непрерывной зависимости от начального условия становятся близкими к графику периодического решения $\varphi_\star$. Но в таком случае наше решение с какого-то момента времени не может вернуться в начальную точку x_0, чтобы оказаться периодическим.

Осталось рассмотреть случай $A = 1$. Если при этом $B = 0$, монодромия тождественная и все решения периодические. Если же $B \neq 0$, то каждое решение вдоль последовательности времен $(t_0 + nT)_{n \in \mathbb{N}}$ убегает на $+\infty$ или $-\infty$ в зависимости от знака B, а потому не периодично.

Упражнение 38. *Стремится ли в случае $A = 1,\ B > 0$ каждое решение к $+\infty$ при $t \to +\infty$?*

Упражнение 39. *Пусть наше уравнение имеет 1-периодические коэффициенты. Пусть у него есть непостоянное решение периода T. Докажите, что в таком случае это решение является также 1-периодическим, а T — рационально.*

8 Системы линейных уравнений: общие свойства

Теперь рассмотрим многомерное линейное уравнение:

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad A \in C^0(I, \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})),\ b \in C^0(I, \mathbb{R}^n),\ I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}. \tag{9}$$

Непрерывность отображений A, b влечет непрерывность правой части по совокупности переменных. Ограниченность $\|A(t)\|$ на любом отрезке влечет липшицевость правой части по x на компактах. Поэтому к уравнению применима теорема существования и единственности (применяем её на областях в $I \times \mathbb{R}^n$ с компактным замыканием).

Замечание 40. В силу оценки $|\dot{x}(t)| \le \|A(t)\||x| + |b(t)|$ применима теорема 21, так что любое решение продолжается на весь интервал I.

Видно, что уравнение линейное, так что для решения достаточно найти общее решение соответствующего однородного уравнения и частное решение неоднородного.

Свойства решений однородной системы

Теорема 41. *Пространство решений однородного уравнения $\dot{x} = A(t)x$ изоморфно пространству начальных условий $\mathbb{R}^n$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$. В частности, оно имеет размерность n.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi \mapsto \varphi(t_0)$, сопоставляющее решению его значение при $t = t_0$. Это линейное отображение в $\mathbb{R}^n$. Оно сюръективно по теореме существования и инъективно по теореме единственности. Значит, это искомый изоморфизм. $\square$

Замечание 42. Для неоднородного уравнения также строится изоморфизм пространства решений и пространства начальных условий как аффинных пространств. Если рассмотреть изоморфизмы $f\colon \varphi \mapsto \varphi(t_0)$ и $g\colon \varphi \mapsto \varphi(t_1)$, то их композиционное частное $g \circ f^{-1}$, с одной стороны, аффинное, а с другой стороны, совпадает с $g_{t_0}^{t_1}$.

Фундаментальные системы и матрицы решений

Определение 43. Фундаментальной системой решений однородного уравнения $\dot{x} = A(t)x$ называется любой базис в пространстве решений. Фундаментальной матрицей решений называется матрица, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений.

Любая матрица $X(t)$, столбцы которой являются решениями уравнения $\dot{x} = A(t)x$, удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ — проверяется отдельно для каждого столбца левой части.

Определение 44. Определитель Вронского (вронскиан) набора из n вектор-функций $f_1(t), \dots, f_n(t) \colon I \to \mathbb{R}^n$ — это определитель матрицы со столбцами $f_1, \dots, f_n$: $W(t) = \det([f_1], \dots, [f_n])$.

Замечание 45. Если $W(t) \not\equiv 0$, то $f_1, \dots, f_n$ — линейно независимы. Действительно, если функции линейно зависимы, то есть нетривиальная тождественно нулевая их линейная комбинация. Тогда при всех t столбцы матрицы линейно зависимы и вронскиан всегда нулевой. Обратное неверно: функции $\binom{1}{1}$ и $\binom{t}{t}$ линейно независимы, но дают нулевой вронскиан.

Предложение 46. *Решения $x^1, \dots, x^n$ уравнения $\dot{x} = A(t)x$ образуют базис если и только если соответствующий определитель Вронского не обнуляется ни при каком $t \in I$.*

Доказательство. Если $\forall t\ W(t) \neq 0$, то $W(t) \not\equiv 0$, а значит $x^1, \dots, x^n$ линейно независимы, как обсуждалось выше. Обратно, пусть $W(t_0) = 0$. Это значит, что есть нетривиальная зависимость $\sum_j c_j x^j(t_0) = 0$ векторов из $\mathbb{R}^n$. Применяя изоморфизм с пространством решений, получаем, что линейная комбинация решений $x^1, \dots, x^n$ с теми же коэффициентами тождественно нулевая. $\square$

Предложение 47. *Общее решение уравнения $\dot{x} = A(t)x$ имеет вид $X(t)c$, где $X(t)$ — любая ФМР, а $c \in \mathbb{R}^n$ — столбец произвольных постоянных.*

Доказательство. Отображение $c \mapsto X(t)c$ — линейно отображает $\mathbb{R}^n$ в пространство решений, притом в ноль переходит только $c = 0$ (потому что $X(t)c$ — линейная комбинация столбцов, а они линейно независимы). Так как размерности пространств одинаковы, это изоморфизм, в частности, сюръекция. $\square$

Предложение 48. *Если $X(t)$ —фундаментальная матрица однородной системы $\dot{x} = A(t)x$, а $C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\det C \neq 0$, то $X(t)C$ — тоже фундаментальная матрица, и любая фундаментальная матрица имеет такой вид для некоторой невырожденной C.*

Доказательство. Столбцы матрицы XC суть линейные комбинации столбцов матрицы X, поэтому они являются решениями уравнения. Кроме того, $\det(X(t)C) = \det X(t) \det C \neq 0$, так что эти решения линейно независимы.

Чтобы доказать второе утверждение, рассмотрим сначала матрицу $C = X^{-1}(t_0)$. ФМР $U(t) = X(t)X^{-1}(t_0)$ удовлетворяет начальному условию $U(t_0) = E$. Если $Y(t)$ — еще одна ФМР, матрица $Y(t)Y^{-1}(t_0)$ удовлетворяет тому же начальному условию, а потому должна совпадать с $U(t)$ на I. Получаем $Y(t) = X(t)(X^{-1}(t_0)Y(t_0)) = X(t)\hat{C}$. $\square$

Метод вариации постоянных

Теперь найдем частное решение неоднородной системы $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, предполагая, что нам откуда-то известна ФМР однородной системы $X(t)$. Будем искать решение в виде $x(t) = X(t)c(t)$, $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Аналогично одномерному случаю, пользуясь тем, что $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$, получаем

$$\dot{X}c + X\dot{c} = AXc + b; \qquad \dot{c} = X^{-1}b; \qquad c = c_0 + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)b(s)\,ds.$$

Берем решение с нулевым начальным условием, возвращаемся к $x(t)$, домножая на $X(t)$, и пишем общее решение неоднородного уравнения (сразу напишем решение задачи Коши):

$$x(t) = X(t)\left(X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)b(s)\,ds\right).$$

Из этого выражения тоже легко видеть, что отображение $g_{t_0}^{t_1}$ является аффинным, притом его линейная часть не зависит от неоднородности b.

Теорема Лиувилля–Остроградского об изменении фазового объема

Как известно, аффинные отображения меняют объемы всех измеримых множеств одинаково — объем умножается на модуль определителя линейной части. Для отображения $g_{t_0}^{t_1}$ линейного уравнения этот множитель — отношение $W(t_1) = \det X(t_1)$ к $W(t_0)$, где $W(t)$ — определитель Вронского соответствующего однородного уравнения.

Теорема 49 (Лиувилля-Остроградского)**.** *Пусть $W(t)$ — вронскиан фундаментальной системы решений уравнения $\dot{x} = A(t)x$. Тогда $W(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{W}(t) = \operatorname{tr} A(t)\, W(t)$ (и следовательно, $W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\,ds}$).*

Доказательство. Пусть $X(t)$ — соответствующая матрица решений: $W = \det X$. Тогда, поскольку $\dot{X} = AX$,

$$X(t+h) = X(t) + \dot{X}(t)h + o(h) = X(t) + A(t)X(t)h + o(h);$$

$$\det(X(t+h)) = \det(E + A(t)h + o(h)) \det X(t) = (1 + \operatorname{tr} A(t)h) \cdot \det X(t) + o(h).$$

Здесь мы вычислили $\det(E + A(t)h + o(h))$ с точностью до $o(h)$, заметив, что произведение диагональных элементов дает $1 + \operatorname{tr} A(t)h + o(h)$, [13] а любое другое произведение из тех, что составляют определитель, будет содержать минимум два недиагональных элемента, а все они порядка $O(h)$, так что произведение будет из класса $o(h)$. Теперь можем написать

$$\frac{1}{h}(\det X(t+h) - \det X(t)) = \frac{1}{h}\det X(t) \cdot (1 + \operatorname{tr} A(t)h + o(h) - 1) = \operatorname{tr} A(t) \det X(t) + o(1)\ (h \to 0).$$

То есть $\dot{W}(t) = \operatorname{tr} A(t) \cdot W(t)$. $\square$

[13] Диагональные элементы имеют вид $1 + a_{jj}(t)h + o(h)$. Когда мы их перемножаем, получаем слагаемое 1 нулевого порядка по h, линейные по h слагаемые $a_{jj}(t)h$, а также конечное число слагаемых, в которые h входит в степени ≥ 2 — их отправляем в $o(h)$.

9 Линейные уравнения n-го порядка на прямой

Рассмотрим уравнение $y^{(n)}+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\dots+a_1(t)y'+a_0(t)y = f(t)$, $a_i,\ f \in C^0(I,\mathbb{R})$, где $I \subset \mathbb{R}$ — интервал. Как мы уже обсуждали, от уравнения высокого порядка естественно перейти к системе уравнений 1-го порядка. В нашем случае система будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1, \\ \dot{x}_1 = x_2, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = -a_{n-1}x_{n-1} - \dots - a_0x_0 + f(t); \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Решения исходного уравнения суть первые компоненты решений системы. Поэтому общие свойства решений аналогичны свойствам решений линейных систем; соответствующие утверждения легко следуют из уже доказанного. Система состоит из n уравнений, так что размерность пространства решений — тоже n. Эта размерность равна порядку уравнения. Напомним, что начальные условия задачи Коши для уравнения порядка n — это значения неизвестной функции и её производных вплоть до порядка $n-1$ в начальный момент времени t_0.

Решения однородного уравнения образуют векторное пространство, а решения неоднородного — аффинное, притом имеет место изоморфизм с пространством начальных условий. Общее решение однородного уравнения имеет вид $c_1u_1+\dots+c_nu_n$, где $u_1,\dots,u_n$ — линейно независимые решения (ФСР), а общее решение неоднородного получается, если добавить частное решение неоднородного.

Частное решение в общем случае ищется методом вариации постоянных. Однако не следует делать подстановку $y = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)u_k(t)$ в исходное неоднородное уравнение! Нужно перейти к системе и применить метод для неё. Напомним, что вариация постоянных приводила в общем случае к уравнению $X(t)\dot{c}(t) = b$, которое в нашем случае превращается в

$$\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ \dot{u}_1 & \dots & \dot{u}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \vdots \\ \dot{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

где u_j образуют ФСР и предполагаются известными (как их искать — в общем случае никто не знает). Эту линейную систему уравнений можно разрешить относительно $\dot{c}_j$, после чего можно найти c_j, проинтегрировав.

Определение 50. Определитель Вронского набора из n функций $u_1,\dots,u_n$ — это определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ \dot{u}_1 & \dots & \dot{u}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Предложение 51. *Набор решений $u_1,\dots,u_n$ образует ФСР однородного уравнения тогда и только тогда, когда для них $W(t) \neq 0$, $\forall t \in I$.*

Доказательство. Рассматривая соответствующую систему уравнений и соответствующий набор её решений, видим, что для них вронскиан (в смысле старого определения) получился тот же. Он не обнуляется в том и только том случае, когда решения линейно независимы. Но в нашем случае это равносильно тому, что их первые компоненты линейно независимы. $\square$

Замечание 52. Заметим, что $u_1(t) = t$ и $u_2(t) = t^2$ — решения уравнения $y''' = 0$, но при этом $\det\begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{pmatrix} = t^2$ обнуляется при $t = 0$. Это потому что мы взяли два решения вместо трёх: если добавить решение $u_0(t) = 1$, получим вронскиан $\det\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$.

Предложение 53. *Формула Лиувилля-Остроградского для уравнений n-го порядка принимает вид $\dot{W}(t) = -a_{n-1}(t)W(t)$.*

Можно задаться вопросом, является ли данная система линейно независимых функций ФСР для линейного уравнения. Ответ положительный.

Теорема 54. *Пусть для функций $u_1, \ldots, u_n$ выполнено $W(t) \neq 0$ на I. Тогда эти функции образуют ФСР для уравнения*

$$\begin{vmatrix} u_1 & \ldots & u_n & y \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ u_1^{(n)} & \ldots & u_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Разлагая по последнему столбцу или строке, видим, что уравнение имеет вид $W(t)y^{(n)} + \cdots = 0$, так что можно поделить на $W(t) \neq 0$ и получится эквивалентное уравнение в каноническом виде. Очевидно, все u_j являются его решениями, потому что при подстановке в определителе получаются два одинаковых столбца. $\square$

10 Линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(t)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $f \in C^0(I, \mathbb{R})$, где $I \subset \mathbb{R}$ — интервал. Теперь коэффициенты при неизвестной функции и её производных — константы. В этом случае, в отличие от общего, уравнение легко решается.

10.1 Однородное уравнение

В качестве мотивировки для дальнейшего рассуждения, сделаем в однородном уравнении подстановку $y = e^{\lambda t}$ в надежде найти решения среди экспонент с разными коэффициентами. Поскольку $\frac{d^k}{dt^k}(e^{\lambda t}) = \lambda^k e^{\lambda t}$, получаем

$$e^{\lambda t}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0) \equiv 0,$$

т.е. если λ — корень многочлена, то $e^{\lambda t}$ — решение однородного уравнения. Многочлен $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$ называется *характеристическим многочленом* нашего уравнения.

Случай различных вещественных корней

Предложение 55. *Пусть $P(\lambda)$ имеет n различных вещественных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тогда $\{e^{\lambda_j t}\}_{j=1}^n$ - фундаментальная система решений однородного уравнения.*

Доказательство. Можно рассмотреть вронскиан нашей системы функций и заметить, что он является произведением положительной функции и определителя Вандермонда от $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)t} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)t} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0.$$

Альтернативное рассуждение: докажем индукцией по числу различных экспонент в линейной комбинации. База очевидна, так как $e^{\lambda t} \neq 0$. Пусть у нас есть тождественно обнуляющаяся линейная комбинация $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} \equiv 0$. Поделим равенство на $e^{\lambda_1 t}$, продифференцируем и применим предположение индукции:

$$c_1 + \sum_{j\geq 2} c_j e^{(\lambda_j - \lambda_1)t} = 0 \Rightarrow \sum_{j \geq 2} c_j (\lambda_j - \lambda_1) e^{(\lambda_j - \lambda_1)t} = 0 \Rightarrow c_j(\lambda_j - \lambda_1) = 0 \ \forall j \geq 2 \Rightarrow c_j = 0 \ \forall j.$$

□

Случай простых комплексных корней

Наряду с вещественными будем также рассматривать комплекснозначные функции вещественного аргумента, в частности экспоненты $e^{(a+bi)t}$. На всякий случай скажем, что такие функции можно, разделяя вещественную и мнимую части, отождествить с функциями из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$; производную можно определить, как в вещественном случае, как предел отношения приращений функции и аргумента, и тогда легко увидеть, что дифференцируемость равносильна дифференцируемости вещественной части и мнимой части. Можно убедиться, что правило Лейбница продолжает работать при дифференцировании произведения. Экспоненту можно определить её обычным рядом Тейлора в нуле. Или через тождество Эйлера: $e^{(a+bi)t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$. В любом случае легко проверяется, что производная экспоненты выглядит так же, как в чисто вещественном случае: $\frac{d}{dt}(e^{(a+bi)t}) = (a+ib)e^{(a+bi)t}$. Подчеркиваю, что аргумент у нас вещественный, знания ТФКП не требуется!

Рассуждение предыдущего пункта можно дословно повторить в случае, когда характеристический многочлен имеет некратные не обязательно вещественные корни. Тогда однородное уравнение имеет комплекснозначные решения $e^{\lambda_j t}$, которые оказываются линейно независимыми над $\mathbb{C}$.

Так как $P \in \mathbb{R}[\lambda]$, для каждого невещественного корня есть комплексно сопряженный ему корень: $P(\lambda) = 0 \Rightarrow P(\overline{\lambda}) = \overline{P(\lambda)} = 0$. В нашей системе линейно независимых комплекснозначных решений есть пара решений $y_1 = e^{(a+bi)t}$, $y_2 = e^{(a-bi)t}$. Заменим их на их полусумму $u_1 = e^{at}\cos bt$ и деленную на i полуразность $u_2 = e^{at}\sin bt$. Соответствующая матрица замены невырождена (она отличается от единичной невырожденным блоком размера 2×2 на диагонали), так что получилась опять система из n линейно независимых над $\mathbb{C}$ функций. Проделав это для каждой пары сопряженных корней, получаем следующее утверждение.

Предложение 56. *Пусть $P(\lambda)$ имеет корни $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ и $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_p \pm i\beta_p$, $k + 2p = n$. Тогда функции*

$$e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k t},$$
$$e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \dots, e^{\alpha_p t}\cos\beta_p t,$$
$$e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \dots, e^{\alpha_p t}\sin\beta_p t$$

образуют фундаментальную систему вещественных решений однородного уравнения.

Доказательство. Мы поняли, что, если рассматривать эти функции как комплекснозначные, они линейно независимы над $\mathbb{C}$. Значит, они линейно независимы и над $\mathbb{R}$. Очевидно, они вещественнозначны и их n штук, так что мы нашли ФСР. □

Общий случай

Обозначим $D = \frac{d}{dt}$ и будем считать, что этот дифференциальный оператор действует на пространстве комплекснозначных бесконечно гладких функций вещественного аргумента (определенных на всём $\mathbb{R}$). Этот оператор линеен, если линейный оператор подставить в многочлен (формально заменить λ на D и интерпретировать полученную запись как линейную комбинацию степеней оператора), получится линейный оператор. Обозначим $L = P(D)$ и $D_\lambda = D - \lambda$ (здесь λ означает оператор умножения функции на константу λ — такой подход к обозначениям типичен в литературе; можно было бы один раз написать $\lambda\,\mathrm{Id}$).

Предложение 57. *Пусть $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{k_p}$. Тогда*

$$P(D) = (D - \lambda_1)^{k_1} \circ \dots \circ (D - \lambda_p)^{k_p}.$$

Доказательство. Ключевым тут является то, что дифференцирование D перестановочно с операторами λ_j умножения на константу — из-за этого разделенные значком $\circ$ операторы перемножаются так же, как множители в многочлене. Если бы на месте λ_j стояли операторы умножения на непостоянную функцию, композиция выглядела бы иначе. Проделаем только последний шаг индукции. Положив

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1 - 1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{k_p},$$

запишем

$$P(D) = ((\lambda - \lambda_1)Q(\lambda))(D) = (\lambda Q(\lambda))(D) - (\lambda_1 Q(\lambda))(D) = D \circ Q(D) - \lambda_1 \cdot Q(D) =$$
$$= (D - \lambda_1) \circ Q(D) = (D - \lambda_1)^{k_1} \circ \dots \circ (D - \lambda_p)^{k_p}.$$

Равенство $[\lambda Q(\lambda)](D) = D \circ Q(D)$ как раз получено с использованием перестановочности D и констант: если $Q(\lambda) = \lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + b_0$, то

$$D \circ Q(D) = D \circ (D^{n-1} + b_{n-2}D^{n-2} + \cdots + b_0) = D^n + b_{n-2}D^{n-1} + \cdots + b_0 D = [\lambda Q(\lambda)](D).$$

□

Определение 58. Квазимногочлен с показателем $\mu \in \mathbb{C}$ — это конечная линейная комбинация функций вида $f_{s,\mu} = t^s e^{\mu t}$, где $s \in \mathbb{Z}_+$, т.е. произведение экспоненты $e^{\mu t}$ и многочлена. Степень квазимногочлена — это степень многочлена, на которую умножена экспонента.

В случае кратных корней, будем искать дополнительные (отличные от чистых экспонент) решения однородного уравнения среди квазиодночленов. Посмотрим, как на них действуют операторы $D_\lambda = D - \lambda$:

$$(D - \lambda)(t^s e^{\mu t}) = st^{s-1}e^{\mu t} + (\mu - \lambda)t^s e^{\mu t}.$$

Отсюда следует, что при $\lambda \neq \mu$ квазимногочлен переходит в квазимногочлен той же степени, а при $\lambda = \mu$ — в квазимногочлен меньшей степени. Усилим это наблюдение.

Введем обозначение для квазимногочленов степени не выше s:

$$P_{s,\mu} = \operatorname{span}\{f_{j,\mu} \mid j \leq s\}.$$

Лемма 59. *1.* $D_\lambda P_{s,\mu} = \begin{cases} P_{s,\mu}, & \mu \neq \lambda, \\ P_{s-1,\mu}, & \mu = \lambda,\ s > 0, \\ 0, & \mu = \lambda,\ s = 0. \end{cases}$ *2.* $D_\lambda^k P_{s,\mu} = \begin{cases} P_{s,\mu}, & \mu \neq \lambda, \\ P_{s-k,\mu}, & \mu = \lambda,\ s \geq k, \\ 0, & \mu = \lambda,\ s < k. \end{cases}$

Доказательство. Случай $\lambda = \mu$ тривиален: порождающая система для $P_{s,\mu}$ переходит под действием D_λ в порождающую систему для $P_{s-1,\mu}$, и так далее. Пусть теперь $\lambda \neq \mu$. Из предыдущего обсуждения ясно, что $D_\lambda P_{s,\mu} \subset P_{s,\mu}$. Почти очевидно, что $f_{0,\mu}, f_{1,\mu}, \ldots, f_{s,\mu}$ линейно независимы: рассмотрим обнуляющуюся линейную комбинацию, поделим на $e^{\mu t}$ — получим нулевой многочлен, его коэффициенты нулевые, значит, линейная комбинация тривиальная. Тогда рассмотрим матрицу ограничения $D_\lambda|_{P_{s,\mu}}$ в базисе $f_{0,\mu}, f_{1,\mu}, \ldots, f_{s,\mu}$. По столбцам стоят координаты образов базисных векторов. Так как $D_\lambda f_{j,\mu} = (\mu - \lambda)f_{j,\mu} + jf_{j-1,\mu}$, в этой матрице на диагонали стоят константы $\mu - \lambda$, непосредственно над диагональю стоят какие-то неотрицательные числа, а в остальных местах — нули. Поэтому матрица невырождена и $P_{s,\mu}$ переходит ровно в себя. То же происходит при k-кратном применении D_λ, $k \in \mathbb{N}$. □

Напомним, что $L = P(D) = (D - \lambda_1)^{k_1} \circ \cdots \circ (D - \lambda_p)^{k_p}$.

Лемма 60.

$$LP_{s,\mu} = \begin{cases} P_{s,\mu}, & \mu \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}, \\ P_{s-k_i,\mu}, & \mu = \lambda_i,\ s \geq k_i \\ 0, & \mu = \lambda_i,\ s < k_i. \end{cases}$$

Доказательство. Следует из предыдущей леммы: D_λ с $\lambda \neq \mu$ переводит $P_{s,\mu}$ в себя, а с $\lambda = \mu$ — понижает первый индекс. □

Лемма 61. *Функции $f_{s,\mu}$ с разными (s, μ) образуют линейно независимый набор.*

Доказательство. Пусть есть нетривиальная линейная комбинация, являющаяся нулевой функцией. Запишем ее как сумму квазимногочленов: $\sum_{k=1}^{p} Q_k(t)e^{\mu_k t}$. Применим к ней оператор

$$D_{\mu_1}^{d_1} \circ \cdots \circ D_{\mu_{p-1}}^{d_{p-1}},$$

где d_k на единицу больше степени многочлена Q_k, для $k = 1, \ldots, p-1$. По лемме 59 оператор убьет все слагаемые суммы квазимногочленов, кроме последнего, а последнее превратит в $R(t)e^{\mu_p t}$, где $R(t)$ — ненулевой многочлен. С другой стороны, по предположению мы применяли оператор к нулевой функции, так что должен был получиться ноль, но для этого $R(t)$ должен быть нулевым — противоречие. $\square$

Следствие 62. *$P_{k_1-1,\lambda_1} \oplus \cdots \oplus P_{k_p-1,\lambda_p}$ — пространство комплексных решений однородного уравнения.*

Доказательство. Из лемм следует, что эта прямая сумма состоит из решений. Доказательство того, что других решений нет, — упражнение. $\square$

Заменяя аналогично случаю простых корней каждую пару $t^s e^{(a \pm bi)t}$ на пару $t^s e^{at} \cos bt$, $t^s e^{at} \sin bt$, получаем вещественную ФСР однородного уравнения.

Предложение 63. *Пусть характеристический многочлен $P(\lambda)$ однородного уравнения имеет вещественные корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ кратности $k_1, \ldots, k_r$ и пары невещественных корней $a_j \pm b_j i$ кратности s_j, $j = 1, \ldots, q$ ($\sum k_r + 2\sum s_j = n$). Тогда функции*

$$e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t};$$

$$\cdots$$

$$e^{\lambda_r t},\ te^{\lambda_r t}, \ldots, t^{k_r-1}e^{\lambda_r t};$$

$$t^j e^{a_1 t} \cos b_1 t,\ t^j e^{a_1 t} \sin b_1 t, \quad j = 0, \ldots, s_1 - 1;$$

$$\cdots$$

$$t^j e^{a_q t} \cos b_q t,\ t^j e^{a_q t} \sin b_q t, \quad j = 0, \ldots, s_q - 1$$

образуют фундаментальную систему вещественных решений однородного уравнения.

10.2 Неоднородное уравнение

В общем случае частное решение неоднородного уравнения находится методом вариации постоянных.

В случае правой части $f(t)$ специального вида, а именно, когда $f(t)$ — квазимногочлен, задача упрощается в связи с тем, что мы знаем, как дифференциальный оператор $L = P(D)$ действует на пространствах $P_{s,\mu}$.

Замечание 64. Если u_1, u_2 — решения линейных уравнений $Lu = f_1$, $Lu = f_2$, то $u_1 + u_2$ — решение уравнения $Lu = f_1 + f_2$. Таким образом, разобрав случай, когда f — квазимногочлен, мы научимся находить решения и в случае, когда это сумма квазимногочленов с разными показателями.

Теорема 65. *Пусть $f(t) = Q(t)e^{\mu t}$. Пусть $d = \deg Q$, а k — кратность μ как корня характеристического многочлена $P(\lambda)$ (если μ не является корнем, то $k = 0$). Тогда существует частное решение неоднородного уравнения, принадлежащее $P_{d+k,\mu}$. Более точно, существует единственное частное решение вида $t^k\hat{Q}(t)e^{\mu t}$, где $\hat{Q}(t)$ — многочлен степени не выше d.*

Доказательство. По лемме 60 $LP_{k+d,\mu} = P_{d,\mu}$, так что первое утверждение доказано: берем любой L-прообраз нашего $f \in P_{d,\mu}$. В случае $k = 0$ второе утверждение тривиализуется в силу того, что ограничение L на $P_{d,\mu}$ — изоморфизм. В случае $k > 0$ рассмотрим любое частное решение u и выделим в нем все слагаемые вида $t^s e^{\mu t}$, $s < k$. Поскольку $LP_{k-1,\mu} = 0$, значение Lu не изменится, если вычеркнуть все эти слагаемые. Таким образом, получили решение вида $t^k\hat{Q}(t)e^{\mu t}$, $\deg \hat{Q} \leq d$. Пусть есть два решения такого вида. Тогда их разность будет решением однородного уравнения, но тогда она должна лежать в $P_{k-1,\mu}$, но тогда она нулевая. □

Теорема 66. *Пусть $f(t) = e^{at}(Q(t)\cos bt + R(t)\sin bt)$, Q, R — вещественные многочлены. Положим $d = \max(\deg Q, \deg R)$. Пусть k — кратность $a + bi$ как корня характеристического многочлена (0, если это не корень). Тогда неоднородное уравнение имеет решение вида $t^k e^{at}(\hat{Q}(t)\cos bt + \hat{R}(t)\sin bt)$, где $\hat{Q}, \hat{R}$ — многочлены степени не выше d.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную комплекснозначную правую часть $F(t)$ и ее вещественную часть $f = \operatorname{Re} F$. Если u является решением уравнения с правой частью F ($Lu = F$), то $\operatorname{Re} u$ является решением уравнения $Ly = f$:

$$L(\operatorname{Re} u) = \operatorname{Re}(Lu) = \operatorname{Re} F = f.$$

Остается заметить, что наша функция f есть вещественная часть некоторого $F \in P_{d,a+bi} \oplus P_{d,a-bi}$. Применяя к F предыдущую теорему и рассматривая вещественную часть решения, получим частное решение нужного вида. □

Замечание 67. Прямая сумма в доказательстве не нужна, но мне кажется, что с ней проще.

Замечание 68. Таким образом, чтобы решить уравнение с правой частью $Q(t)e^{at}\cos bt$, где Q — вещественный многочлен, достаточно найти частное решение уравнения с правой частью $Q(t)e^{(a+bi)t}$, что, возможно, будет проще, а потом взять от него вещественную часть. Такой способ решения называется *методом комплексных амплитуд.*

Замечание 69. Случай, когда μ является корнем P, называется *резонансным.* Резонанс — это резкое увеличение амплитуды колебаний колебательной системы, на которую действует внешняя периодическая сила, когда период силы совпадает с периодом собственных колебаний системы: полк марширует по мосту в такт с его собственными колебаниями, мост раскачивается и разваливается. Рассмотрим математический маятник $\ddot{x} + x = 0$, добавим внешнюю силу $f(t) = \sin \omega t$: $\ddot{x} + x = \sin \omega t$ Нетрудно найти характеристический многочлен $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$ и общее решение однородного уравнения $c_1 \cos t + c_2 \sin t = c\cos(t + \varphi_0)$). В нерезонансном случае общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\frac{\sin \omega t}{1 - \omega^2} + c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Здесь на первое слагаемое можно смотреть как на вынужденные (внешней силой) колебания, а на второе — как на свободные колебания маятника с собственной частотой, которые наложились на вынужденные. При подходе ω к резонансным значениям ± 1 амплитуда первого слагаемого растет к бесконечности. В резонансном случае имеем *неограниченные* решения

$$\mp\frac{1}{2}t\cos t + c_1\cos t + c_2\sin t.$$

Подробнее про метод комплексных амплитуд и резонансы см. в [А, 3.26.6].

11 Системы линейных уравнений с постоянной матрицей

Рассмотрим теперь систему линейных уравнений $\dot{x} = Ax + f(t)$, где $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ — постоянная матрица. При замене координат она преобразуется как матрица линейного оператора: если $x = Cy$, то на y получаем уравнение

$$C\dot{y} = ACy + f(t) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{y} = (C^{-1}AC)y + C^{-1}f(t),$$

так что будем держать в уме соответствующий линейный оператор на $\mathbb{R}^n$.

Решение однородной системы

Рассмотрим сначала случай, когда матрица A вещественно диагонализуема, то есть соответствующий оператор имеет базис из собственных векторов $v^1, \ldots, v^n$, отвечающих (не обязательно различным) собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Легко видеть, что вектор-функции $e^{\lambda_j t}v^j$ являются решениями уравнения:

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda_j t}v^j) = \lambda_j e^{\lambda_j t}v^j = A(e^{\lambda_j t}v^j).$$

Они линейно независимы, т.к. линейно независимы их значения v^j при $t = 0$ (вспомним про изоморфизм между пространством решений и пространством начальных условий). Таким образом, мы нашли ФСР.

Пусть теперь матрица A не является вещественно диагонализуемой, но является комплексно диагонализуемой. Это значит, что мы рассматриваем линейный оператор из $\mathbb{C}^n$ в себя с этой матрицей. Он называется *комплексификацией* соответствующего вещественного оператора. Притом $\mathbb{R}^n$, на котором действовал исходный оператор, вложено в $\mathbb{C}^n$ отображением $\xi \mapsto \xi + i\cdot 0$. Про комплексифицированный оператор мы предполагаем, что у него есть собственный базис из комплексных векторов — в этом базисе его матрица будет, очевидно, диагональной с собственными числами на диагонали.

Заметим, что так как матрица A вещественна, если она имеет собственый вектор v с собственным числом λ, то комплексно-сопряженный вектор $\overline{v}$ будет собственным с собственным значением $\overline{\lambda}$: $A\overline{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda}\overline{v}$. Поэтому можно разбить невещественные (в том числе кратные) собственные числа и их собственные вектора на пары сопряженных и от пары комплексных решений $x_1 = e^{\lambda t}v,\ x_2 = e^{\overline{\lambda}t}\overline{v}$ перейти к паре $u_1 = \mathrm{Re}\, x_1,\ u_2 = \mathrm{Im}\, x_1$. Это обратимая замена базиса, а после всех таких замен мы получим базис из вещественных решений.

Замечание 70. Уместно также повторить замечание из доказательства теоремы 66: в силу того, что матрица A — вещественная, если u — решение линейного уравнения $\dot{u} - Au = F$, то $\operatorname{Re} u$ — решение $\dot{y} - Ay = \operatorname{Re} F$, а $\operatorname{Im} u$ — решение уравнения $\dot{y} - Ay = \operatorname{Im} F$, потому что $L = \frac{d}{dt} - A$ перестановочен с взятием вещественной и мнимой части.

В общем случае матрица A недиагонализуема, но у нее есть комплексная жорданова нормальная форма: существует невырожденная $C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, такая что $B = C^{-1}AC$ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{K_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{K_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{K_s} \end{pmatrix}, \text{ где } K_j = (\lambda_j) \text{ или } K_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Таким образом, после линейной замены координат система уравнений принимает вид прямого произведения: можно независимо решать уравнения вида $\dot{z} = K_j z$, соответствующие жордановым клеткам. Рассмотрим уравнение такого вида с жордановой клеткой K размера k с собственным значением λ. После замены $z = e^{\lambda t} w$ система легко решается:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda z_1 + z_2, \\ \dot{z}_2 = \lambda z_2 + z_3, \\ \dots \\ \dot{z}_k = \lambda z_k \end{cases} \to \begin{cases} \dot{w}_1 = w_2, \\ \dot{w}_2 = w_3, \\ \dots \\ \dot{w}_k = 0 \end{cases} \to \begin{cases} w_1 = c_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + c_2 t + c_1, \\ \dots \\ w_{k-1} = c_k t + c_{k-1}, \\ w_k = c_k. \end{cases}$$

Решение также можно записать (и удобнее помнить) в виде

$$z = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}.$$

Общее решение исходного уравнения собирается из блоков такого вида. Можно сформулировать такое утверждение.

Предложение 71. *Комплексные решения однородной системы $\dot{x} = Ax$ имеют вид $x = P_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + P_m(t)e^{\lambda_m t}$, где λ_j — различные собственные значения матрицы A, а $P_j(t)$ — векторные многочлены (векторы, компоненты которых многочлены), притом $\deg P_j(t) + 1$ не превосходит максимального размера жордановой клетки с собственным числом λ_j для нормальной формы матрицы A.*

Доказательство. Из предыдущего обсуждения видно, что в жордановом базисе решение имеет заявленный вид. Он сохраняется при линейной замене координат, притом мономов более высокой степени появиться не может. □

Это не общее решение, потому что неверно, что любая вектор-функция такого вида — решение: число неопределенных коэффициентов в векторных многочленах заведомо больше размерности пространства решений.

Следствие 72. *Вещественные решения однородной системы имеют вид*

$$\sum_{j=1}^{k} P_j(t)e^{\lambda_j t} + \sum_{s=1}^{q} e^{a_s t}(Q(t)\cos b_s t + R(t)\sin b_s t),$$

где λ_j — различные вещественные собственные числа, а $a_s \pm b_s i$ — различные комплексные собственные числа, а степени многочленов не превосходят максимального размера соответствующих жордановых клеток минус 1.

Экспонента от линейного оператора

Мы сейчас определим экспоненту от линейного оператора (или от матрицы) таким образом, что решение однородной линейной системы запишется так же, как в одномерном случае: $x(t) = e^{At}c$, — только теперь уже c — вектор произвольных постоянных.

Определение 73. Экспонентой линейного оператора A называется линейный оператор e^A, заданный рядом

$$e^A = E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$$

Мы будем рассматривать операторы на конечномерном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. Они сами образуют векторное пространство, притом тоже конечномерное. По умолчанию мы будем считать, что на нем фиксирована операторная норма, связанная с нормой на $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. Все нормы на конечномерном пространстве наших операторов эквивалентны и превращают его в Банахово (полное нормированное) пространство. Сходимость ряда — это сходимость последовательности частичных сумм, а сходимость последовательности — это стремление нормы разности с пределом к нулю с ростом индекса.

Предложение 74. *Пусть числовой ряд $\sum \alpha_n$ сходится и для операторов A_n выполнено $\|A_n\| \le \alpha_n$. Тогда ряд $\sum A_n$ тоже сходится.*

Доказательство. Естественный способ это доказывать — проверить фундаментальность последовательности частичных сумм:

$$\|S_{k+p} - S_{k-1}\| = \|A_k + \dots + A_{k+p}\| \le \sum_{j=k}^{k+p} \|A_j\| \le \sum_{j=k}^{k+p} \alpha_j.$$

□

Предложение 75. *Для операторной нормы выполнено $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$.*

Доказательство. $\|AB\| = \sup_{|x|=1} |ABx| \le \sup_{|x|=1} \|A\||Bx| = \|A\|\|B\|$. □

Предложение 76. *Экспонента определена для любого оператора на $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ и для любой квадратной матрицы.*

Доказательство. Рассмотрим оператор A. В силу предыдущего предложения, $\|A^n\| \le \|A\|^n$, так что ряд из определения e^A «мажорируется» по норме числовым рядом для $e^{\|A\|}$, а потому сходится по предложению 74. □

Предложение 77. *Для любого оператора A ряд для функции e^{At} равномерно сходится в любом круге $\{t \in \mathbb{C} \mid |t| < t_0\}$.*

Доказательство. Соответствующий ряд из норм при любом t мажорируется рядом для $e^{\|A\|t_0}$, потому равномерно сходится. Значит, ряд из операторов сходится равномерно абсолютно. $\square$

Свойства матричной экспоненты

Свойство 1. Если операторы A и B коммутируют ($AB = BA$), то выполнено $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

Доказательство. Запишем такое же тождество для $\|A\|, \|B\|$: $e^{\|A\|+\|B\|} = e^{\|A\|}e^{\|B\|}$. Для правой части имеем

$$e^{\|A\|}e^{\|B\|} = (1 + \|A\| + \ldots)(1 + \|B\| + \ldots) = \sum_{i,j} \frac{1}{i!j!}\|A\|^i\|B\|^j.$$

Мы раскрыли скобки, пользуясь теоремой Коши для произведения рядов. Справа на самом деле имеется в виду не двойной ряд, а одинарный с суммированием слагаемых в произвольном фиксированном порядке. Для левой части:

$$e^{\|A\|+\|B\|} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\|A\| + \|B\|)^k}{k!} = \sum_{i,j} \frac{1}{i!j!}\|A\|^i\|B\|^j.$$

Здесь мы раскрыли скобки по биномиальной формуле и собрали коэффициенты. Итак, равенство для чисел выполнено — проведем аналогичное рассуждение для операторов. В случае абсолютной сходимости для операторов выполнен аналог теоремы Коши, так что

$$e^A e^B = (E + A + \ldots)(E + B + \ldots) = \sum_{i,j} \frac{1}{i!j!} A^i B^j.$$

С другой стороны,

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{i,j} \frac{1}{i!j!} A^i B^j.$$

Здесь после раскрытия биномов мы замечаем, что полученный ряд абсолютно сходится, потому что мажорируется числовым рядом, который получается при раскрытии скобок в ряде $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(\|A\|+\|B\|)^k}{k!}$. Абсолютно сходящийся ряд можно суммировать в любом порядке, что позволяет написать последнее равенство. $\square$

Свойство 2. Выполнено $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$.

Доказательство. Будем считать, что здесь A — матрица, тогда понятно, что такое производная (иначе надо было бы пояснить, что такое производная операторнозначного отображения — сформулируйте определение сами, оно такое же, как и всегда). Запишем ряд для e^{At} и убедимся, что его можно почленно дифференцировать в силу равномерной сходимости ряда из производных. Так как $\frac{d}{dt}\left(\frac{A^k t^k}{k!}\right) = A\frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}$, ряд из производных имеет вид

$$A + \frac{A^2 t}{1!} + \dots + \frac{A^{k+1}t^k}{k!} + \dots,$$

он равномерно сходится, так что применяем обобщение для матриц теоремы о почленном дифференцировании, либо саму эту теорему [14]. □

Следствие 78. *Матрица $X(t) = e^{At}$ является ФМР для уравнения $\dot{x} = Ax$ с начальной матрицей $X(0) = E$. Соответственно, чтобы ее найти, достаточно найти решения уравнения с начальными условиями $x(0) = e_j$.*

Доказательство. По свойству 2, столбцы матрицы являются решениями. Они линейно независимы, потому что отвечают независимым начальным условиям e_j. □

Следствие 79. *Выполнено* $\det e^{At} = e^{\operatorname{tr} A\cdot t}$. *В частности,* $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

Доказательство. Применяем теорему Лиувилля:

$$\det e^{At} = W(t) = W(0)e^{\int_0^t \operatorname{tr} A ds} = 1 \cdot e^{\operatorname{tr} At}.$$

□

Свойство 3. Для любой обратимой матрицы C выполнено $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^A C$.

Доказательство. Отображение $B \mapsto C^{-1}BC$ линейно, а потому непрерывно (B живет в конечномерном пространстве, где все линейные отображения непрерывны) и перестановочно с переходом к пределу, так что

$$C^{-1}e^A C = C^{-1}\left(\lim_{k\to\infty}\sum_0^k \frac{A^j}{j!}\right)C = \lim_{k\to\infty}\sum_0^k \frac{C^{-1}A^j C}{j!} = e^{C^{-1}AC}.$$

□

Свойство 4. Альтернативное определение экспоненты: $e^A = \lim\limits_{k\to+\infty}\left(E + \frac{A}{k}\right)^k$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\Delta_k = \sum\limits_{j=0}^k \frac{A^k}{k!} - \left(E + \frac{A}{k}\right)^k \to 0$ по норме. Раскрывая скобки, получаем равенство $\Delta_k = \sum_j c_j A^j$, притом c_j получаются такие же, как если бы мы в этом рассуждении заменили A на $\|A\|$. Для нас существенно, что эти коэффициенты положительны:

$$c_j = \frac{1}{j!} - C_k^j\frac{1}{k^j} = \frac{1}{j!}\left(1 - \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{k^j}\right) > 0.$$

Рассмотрим $\delta_k = \sum\limits_{j=0}^k \frac{\|A\|^k}{k!} - \left(1 + \frac{\|A\|}{k}\right)^k$ — известно, что $\delta_k \to 0$ (мы знаем ряд для экспоненты). Тогда $\|\Delta_k\| \le \sum_{j=0}^k \|c_j A^j\| \le \sum_{j=0}^k c_j\|A\|^j = \delta_k \to 0$ и всё доказано. □

[14]Поясним, почему ряд для элементов на месте (p, q) сходится. Модуль этого элемента не превосходит нормы Фробениуса матрицы (норма Фробениуса — это евклидова длина матрицы как вектора из n^2 компонент), а в силу эквивалентности норм эта норма не превосходит C на операторную норму. Поэтому если матричный ряд мажорируется числовым (это у нас происходит в операторной норме), то ряд для компонент мажорируется тем же числовым, умноженным на C.

Вычисление матричной экспоненты

Для вычисления экспоненты от матрицы можно перейти в жорданов базис и заметить, что жордановы клетки возводятся в степень независимо друг от друга. Поэтому имеем

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{K_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{K_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{K_s} \end{pmatrix}, \qquad e^B = \begin{pmatrix} \boxed{e^{K_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{e^{K_2}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{e^{K_s}} \end{pmatrix}.$$

Для вычисления экспоненты от жордановой клетки заметим, что она представляется в виде $K = \lambda E + N$, где степени N легко считаются:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ N^{k-1} = E_{1k}, \ N^k = 0.$$

Очевидно, λE и N коммутируют, так что

$$e^K = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & \frac{1}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{(k-2)!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & & \dots & & 1 & 1 \\ 0 & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{Kt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это совпадает с видом решения, который мы получили выше. Составив матрицу экспоненты из таких блоков, вернемся в исходные координаты.

Решение неоднородного уравнения

В общем случае ищется методом вариации произвольных постоянных. В случае правой части специального вида может быть использован метод неопределенных коэффициентов.

Теорема 80. *Пусть $f(t) = P(t)e^{\mu t}$, где P — векторный многочлен степени d. Тогда существует частное решение неоднородного уравнения вида $\hat{P}(t)e^{\mu t}$, где степень векторного многочлена $\hat{P}$ не превосходит $d+k$, где k — максимальный размер жордановой клетки, отвечающей собственному значению μ ($k = 0$, если μ не является собственным числом для A).*

Доказательство. Перейдем в жорданов базис, от этого степень многочлена в неоднородной части не изменится. Рассмотрим любую из жордановых клеток — пусть это клетка размера k с λ на диагонали. Как и в рассуждении для однородного уравнения, сделаем замену $z = e^{\lambda t} w$. Получим систему

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = w_2 + p_1(t) e^{(\mu-\lambda)t}, \\ \dot{w}_2 = w_3 + p_2(t) e^{(\mu-\lambda)t}, \\ \dots \\ \dot{w}_k = p_k(t) e^{(\mu-\lambda)t}, \end{cases}$$

где степени многочленов p_j не превосходят d. Если $\mu - \lambda \neq 0$, то по лемме 59 выполнено $DP_{d,\,\mu-\lambda} = P_{d,\,\mu-\lambda}$, так что у последнего уравнения есть решение-квазимногочлен из $P_{d,\,\mu-\lambda}$. Далее рассматриваем предпоследнее уравнение и приходим к тому же выводу, и так далее. Если же $\mu = \lambda$, при решении k-го уравнения мы интегрируем многочлен и получаем многочлен на единицу большей степени, подставляем его в предыдущее уравнение и продолжаем интегрировать. Когда мы решим первое уравнение, степень повысится не более чем на k (но достигнет ли $k + d$ — неясно). $\square$

Следствие 81. *Пусть $f(t) = e^{at}(P(t)\cos bt + Q(t)\sin bt)$ и $d = \max(\deg(P), \deg(Q))$. Тогда существует частное решение неоднородного уравнения вида $e^{at}(\hat{P}(t)\cos bt + \hat{Q}(t)\sin bt)$, где степени векторных многочленов $\hat{P}, \hat{Q}$ не превосходят $d + k$, где k — максимальный размер жордановой клетки, отвечающей собственному значению $a + bi$ ($k = 0$, если $a + bi$ не является собственным числом для A).*

12 Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость

Определение 82. Решение $\varphi(t)$ уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \colon \forall y_0 \colon |y_0 - x_0| < \delta\ \forall t \geq t_0$ решение $\psi(t)$ того же уравнения с начальным условием $\psi(t_0) = y_0$ определено при t и для него выполнено $|\psi(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon$.

Определение 83. Решение $\varphi(t)$ уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ называется асимптотически устойчивым, если оно 1) устойчиво по Ляпунову и 2) для любого достаточно близкого к x_0 начального условия y_0 расстояние между соответствущим решением $\psi(t)$ и решением $\varphi(t)$ стремится к $\varphi(t)$:

$$\exists \delta > 0 \colon \forall y_0 \colon |y_0 - x_0| < \delta \Rightarrow |\psi(t) - \varphi(t)| \to 0\ (t \to +\infty).$$

Замечание 84. 1. Считаем, что мы находимся в условиях теоремы существования и единственности. Тогда выбор начального момента времени t_0 в определении несущественен в силу непрерывной зависимости решения от начального условия (если решения достаточно близки в момент t_0, то они автоматически близки и в *фиксированный* момент t_1 в силу непрерывной зависимости от начального условия).
2. В определении асимптотической устойчивости второе условие не влечет первое. Рассмотрим фазовый портрет на единичной окружности с одной неподвижной точкой и одной траекторией, которая справа удаляется от особой точки, а слева приближается к ней. Продолжим портрет на всю плоскость так, чтобы внутри единичного круга траектории были стягивающимися к особой точке (проколотыми в ней)

окружностями, а траектории снаружи один раз огибали единичную окружность и упирались в особую точку. Тогда траектория с любым начальным условием будет стремиться к особой точке, но в любой окрестности особой точки будет начальное условие, для которого соответствующее решение удаляется от особой точки на расстояние 2.

12.1 Критерий устойчивости для линейных систем с постоянными коэффициентами

Теорема 85. *Рассмотрим линейное однородное уравнение* $\dot{x} = Ax$ *с постоянной матрицей* A *с собственными значениями* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *(перечислены различные).*

1. *Если для всех* j *выполнено* $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, *то все решения асимптотически устойчивы.*

2. *Если* $\forall j\colon \operatorname{Re}\lambda_j \leq 0$ *и для* $\lambda_j\colon \operatorname{Re}\lambda_j = 0$ *есть жордановы клетки только размера 1, все решения устойчивы по Ляпунову.*

3. *Если есть* $\lambda_j\colon \operatorname{Re}\lambda_j > 0$ *или есть* $\lambda_j\colon \operatorname{Re}\lambda_j = 0$ *с нетривиальной жордановой клеткой, все решения неустойчивы по Ляпунову.*

Доказательство. Для линейной однородной системы все решения одинаковы в плане устойчивости: если φ устойчиво по Ляпунову, то нулевое решение тоже устойчиво: возьмем решение $\psi(t)$ с $\delta(\varepsilon)$-близким к нулю начальным условием и рассмотрим решения φ и $\varphi + \psi$: у них $\delta(\varepsilon)$-близкие начальные условия, так что они не расходятся ε-далеко. Но тогда $|\psi(t) - 0| = |\varphi(t) - (\varphi - \psi)(t)| \leq \varepsilon$. Так что все утверждения будем доказывать про нулевое решение.

Докажем первое утверждение. Все комплексные решения нашей системы имеют вид $P_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + P_r(t)e^{\lambda_r t}$, где P_j — вектор-многочлены (степени которых не превосходят максимальные размеры соответствующих жордановых клеток минус 1). Так как $|P_j(t)e^{\lambda_j t}| \to 0$ при $t \to +\infty$, у любой фундаментальной матрицы столбцы ограничены. В частности, у e^{At}. Но тогда, умножая ФМР e^{At} на достаточно малое по норме начальное условие (пусть теперь уже вещественное), получим ε-близкое к нулю решение — устойчивость по Ляпунову доказана. В силу сходимости столбцов к нулю при $t \to +\infty$, есть и асимптотическая устойчивость.

Пусть теперь есть собственные значения с $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, но с тривиальными жордановыми клетками. Степень соответствующего векторного многочлена P_j тогда нулевая, поэтому по-прежнему верно, что $|P_k(t)e^{\lambda_k t}|$ ограничены — и устойчивость по Ляпунову получается так же, как и выше. Но асимптотической устойчивости нет: в жордановом базисе уравнение на одну из компонент имеет вид $\dot{y} = \lambda_j y$, берем начальное условие с δ в этой компоненте и нулями в остальных, получаем решение с одной ненулевой компонентой вида δe^{ibt}, т.е. не притягивающееся к нулю. Возвращаемся в исходный базис и видим (близкое к нулю при малом δ) решение, не притягивающееся к нулю. Его вещественная и мнимая части — тоже решения, хотя бы одно из них обладает тем же свойством.

Пусть теперь есть собственное значение с $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$ или мнимое с.з. с нетривиальной клеткой. В первом случае есть комплексное частное решение вида $\delta \cdot e^{\lambda_j t} v_j$, где v_j — собственный вектор. Его вещественная или мнимая часть при $t \to +\infty$ уезжает на бесконечность, но начальное условие можно приблизить к нулю выбором δ. Во втором случае есть частное решение вида $P_j(t)e^{\lambda_j t}$, где P_j — вектор-многочлен не менее чем первой степени, а $|e^{\lambda_j t}| = 1$. Это решение можно умножить на δ и закончить рассуждение так же. $\square$

Список литературы

[А] В. И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения.

[БГИ] Буфетов А.И., Гончарук Н.Б., Ильяшенко Ю.С., Обыкновенные дифференциальные уравнения.

[Филиппов] Филиппов А.Ф., Введение в теорию дифференциальных уравнений.