

Введение в дискретную математику и топологию. Осень 2025г

Задачи к семинарам. Список 4.5.

Элементы комбинаторики.

Не все задачи из этого списка будут обязательно разбираться на семинаре, некоторые задачи могут быть оставлены для самостоятельного решения.

- (1) Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые делятся на 3? На 5? На 15? Не делятся ни на 3, ни на 5?
- (2) Сколько существует целых чисел от 1 до 1 000 000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью целого числа?
- (3) Имеются: 4 попарно отличающиеся друг от друга чашки, 4 совершенно одинаковых графинённых стакана, 7 совершенно одинаковых кусков сахара, 7 попарно отличающиеся друг от друга соломинок и 7 попарно отличающиеся друг от друга пакетиков чая. Найдите, сколькими способами можно разложить:
 - а) по 1 пакету чая в каждый стакан;
 - б) по 1 пакету чая в каждую чашку;
 - в) все соломинки по чашкам;
 - г) весь сахар по чашкам;
 - д) весь сахар по стаканам.
 - е)* все соломинки по стаканам.
- (4) Сколькими способами можно
 - а) разбить $2n$ человек на пары?
 - б) разбить $3n$ человек на тройки?
 - в) расставить n человек в хоровод?
 - г) составить из $2n$ человек два хора по n человек в каждом?
 - д) составить из $3n$ человек три хора по n человек в каждом?
- (5)
 - а) Сколько имеется различных одночленов степени d от n переменных?
 - б) Сколько имеется различных одночленов степени d от n переменных, в которых каждая переменная входит в ненулевой степени?
- (6) Сколькими способами можно представить число $n \in \mathbb{N}$ в виде суммы (произвольного числа) натуральных слагаемых? Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.
- (7) Используя формулу бинома, вычислите суммы
 - а) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$;
 - б) $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$;
 - в) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.
- (8) Предложите чисто комбинаторные доказательства тождеств:
 - а) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$;
 - б) $\sum_{r=0}^k \binom{n-r-1}{k-r} = \binom{n}{k}$

(9) Докажите следующие тождества¹:

а) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$

б) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 0.$

в) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{2[\frac{n}{2}]} = 2^{n-1}.$

г) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$

д) $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$

е) $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n-[\frac{n}{2}]}{[\frac{n}{2}]} = f_n$ — n -ое число Фибоначчи.

ж) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$

(10) Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение $k_1 + \dots + k_m = n$ ($m, n \in \mathbb{N}$ фиксированы, k_i — неизвестные)?

(11) Докажите формулу полинома

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}.$$

(12) Будем называть ряды чисел в треугольнике Паскаля, параллельные его боковым сторонам, правыми или левыми диагоналями, в зависимости от того какой из боковых сторон они параллельны.

а) Докажите, что каждое число a в треугольнике Паскаля равно сумме чисел предыдущей правой диагонали, начиная с самого левого вплоть до стоящего справа над числом a . Запишите это утверждение в виде формулы и сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для левой диагонали.

б) Докажите, что каждое число a в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит число a (сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются).

(13) Рассмотрим пути на клетчатой бумаге, идущие по ее линиям вправо или вверх.

а) Сколько таких путей, ведущих из начала координат в точку (m, n) ? ($m, n \geq 0$.)

б) Разобьем пути из начала координат в точку (m, n) на два класса. В первый отнесем пути, у которых первый участок горизонтальный; во второй — у которых первый участок пути вертикальный. Какое тождество на биномиальные коэффициенты получится?

в) Тот же вопрос про разбиения множества путей на $(m+1)$ классов в зависимости от того, когда путь достигнет прямой $y = 1$.

¹ $[x]$ это целая часть числа x .

- (14) Пусть $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Сколько имеется различных отображений $f : M \rightarrow N$
- а) строго возрастающих (т.е. если $x < y$, то $f(x) < f(y)$)?
 - б) неубывающих (т.е. если $x < y$, то $f(x) \leq f(y)$)?
- (15) Сколько k -мерных граней у n -мерного куба?
- (16) Пусть $|X| = n$. Сколько отображений $f : X \rightarrow X$ не имеют
- а) неподвижных точек? (Т.е. $\forall x \in X \ f(x) \neq x$.)
 - б) инвариантных подмножеств, отличных от X ? (Непустое подмножество $Y \subset X$ называется инвариантным относительно f , если $f(Y) \subset Y$.)
 - **в) нетривиальных циклов, т.е. таких $x \in X$, что $f(x) \neq x$, но $\exists k \in \mathbb{N}$, такое что $f^k(x) = x$.
- (17) Докажите, что а) $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n = n!$; б) $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^{n+1} = \frac{n(n+1)!}{2}$.