

Семинар 5.

Задача 1. На проективной плоскости даны три различные прямые l_1 , l_2 и m . Как выбрать на l_1 три различные точки A , B и C и соответственно точки A' , B' и C' на l_2 так, чтобы прямая Паппа, построенная по этим точкам в соответствии с теоремой Паппа, совпала с прямой m .

Задача 2. Докажите совпадение уже известного нам определения двойного отношения $(ABCD)$ четырех различных точек A , B , C , D на проективной прямой $\mathbb{P}^1$ со следующим определением. Пусть на $\mathbb{P}^1$ выбрана какая-нибудь система координат, в которой $A = (1 : 0)$, $B = (0 : 1)$. Пусть в этой системе координат $C = (x_1 : x_2)$, $D = (x_3 : x_4)$. Положим $\lambda = x_2/x_1$, $\mu = x_4/x_3$. Тогда полагаем $(ABCD) = \frac{\lambda}{\mu}$.

Задача 3. Докажите, что двойное отношение сохраняется при проективных отображениях, т.е. если $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ - проективное отображение и A , B , C , D - четыре различные точки на $\mathbb{P}^1$, то $(ABCD) = (f(A)f(B)f(C)f(D))$.

Задача 4. Пусть основное поле есть $\mathbb{C}$. Пусть $\lambda = (ABCD)$ - двойное отношение 4 точек, из которого перестановками этих точек получаются, включая λ , 6 чисел λ , $\frac{1}{\lambda}$, $1 - \lambda$, $\frac{\lambda-1}{\lambda}$, $\frac{\lambda}{\lambda-1}$, $\frac{1}{1-\lambda}$. Нам уже известны такие числа λ , для которого не все из указанных 6 чисел различны, - это числа $\lambda = -1, 2$ и $\frac{1}{2}$. Существуют ли другие значения λ , для которых также не все из указанных 6 чисел различны? Если да, то найдите эти значения.

Задача 5. Пусть A и B — две различные точки на проективной прямой. Докажите, что для любой точки C , отличной от A и B , существует единственная точка C' такая, что $(A, B, C, C') = -1$, и что сопоставление точке C точки C' является действием проективной инволюции, а именно, единственной проективной инволюции с неподвижными точками A и B . Покажите, что и, наоборот, для любой проективной инволюции f с неподвижными точками A и B двойное отношение $(A, B, C, f(C)) = -1$ для любой точки C , отличной от A и B .