

Уважаемые первокурсники!

Темы экзаменационной контрольной работы 25 октября 25 года 21 века

(На контрольной можно пользоваться любыми Бумажными носителями информации)

Обратимость и невырожденность. Подпространства, нахождение базиса подпространства, нахождение базиса суммы и пересечения подпространств, прямая сумма.

Линейное отображение и его матрица в базисах. Однозначное задание линейного отображения образами базисных векторов. Ядро и образ линейного отображения.

Задачи для подготовки к контрольной

1. Доказать, что любое подпространство W векторного пространства V имеет дополнение, т.е. такое подпространство U , что $V = W \oplus U$.

2. Возможно ли, чтобы нетривиальное (т.е. отличное от O и V) подпространство имело единственное дополнение?

3. Доказать, что два трехмерных подпространства пятимерного векторного пространства не могут пересекаться по нулевому подпространству.

4. Доказать, что пространство многочленов степени $\leq n$ есть прямая сумма подпространства четных многочленов и подпространства нечетных многочленов.

5. Пусть $L = V_1 + V_2$, $M = V_1 \cap V_2$, где V_1, V_2 – подпространства пространства V . Верно ли, что для линейного отображения $A: V \rightarrow U$:

а) $A(L) = A(V_1) + A(V_2)$;

б) $A(M) = A(V_1) \cap A(V_2)$?

6. Пусть $A: V \rightarrow U$. Доказать, что $\dim \operatorname{Im} A \leq \dim V$.

7. Существует ли линейный оператор $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, который

а) векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ переводит в векторы $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ соответственно;

б) векторы $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ переводит в векторы $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ соответственно.

Если ответ Да, то запишите матрицу такого оператора в стандартном базисе (=базис Плавающая Единичка).

8. В пространстве многочленов степени $\leq n$ построить два различных линейных оператора, имеющих один и тот же образ и ядро.

9. Пусть A – линейное отображение из пространства многочленов степени ≤ 100 в пространство вектор-строк длины 77, которое многочлен $p(x)$ переводит в строку $(p(1), p(2), \dots, p(77))$. Найти его ядро и образ.

Удачи,

О.В.