

Многочлены 2

В этом листке все многочлены определены над полем характеристики $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$.

АС5♦1. Определите кратность корня $x_0 = 3$ многочлена $x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 36x^2 - 27x - 54$.

АС5♦2. При каких a и b многочлен $x^5 + ax^3 + b$ имеет двойной корень, отличный от нуля?

АС5♦3. Докажите, что многочлен

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

АС5♦4. Определите кратность корня a многочлена

$$\frac{(x-a)}{2}(f'(x) + f'(a)) - f(x) + f(a),$$

где $f(x)$ — некоторый многочлен.

Определение Многочлен с целыми коэффициентами $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ называется *примитивным*, если $\text{НОД}(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0) = 1$.

АС5♦5. Докажите, что произведение примитивных многочленов это примитивный многочлен.

АС5♦6. Докажите, что если многочлен с целыми коэффициентами приводим над полем $\mathbb{Q}$, то он может быть разложен в произведение двух многочленов меньшей степени с целыми коэффициентами.

АС5♦7 (Признак неприводимости Эйзенштейна). Покажите, что если для многочлена с целыми коэффициентами, есть простое натуральное p такое, что:

- старший коэффициент не делится на p ,
- все остальные коэффициенты делятся на p ,
- свободный член не делится на p^2 ,

тогда этот многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$.

АС5♦8. Докажите неприводимость над полем $\mathbb{Q}$ многочленов:

а) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$,

б) $7x^5 - 12x^3 + 36x - 12$,

в) $\Phi_p = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$, где p — простое число.

(подсказка: можно сделать замену $y = x - 1$)